Les Mathématiques pour l'Agrégation

C. Antonini
J.-F. Quint
P. Borgnat
J. Bérard
E. Lebeau
E. Souche
A. Chateau
O. Teytaud

24 avril 2002

Table des matières

Chapitre 1

Algèbre linéaire

1.1 Généralités

Définition 1 (Espace vectoriel) $(E, +, .)$ *est un* $\mathbb{K}$**-espace vectoriel** *si*
• $(E, +)$ *est un groupe abélien*
• $.$ *est une application de* $K \times E$ *dans* E
• $\forall(\lambda, \mu, x, y)\ (\lambda + \mu)x = \lambda.x + \mu.x \wedge \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y \wedge (\lambda.\mu).x = \lambda.(\mu.x) \wedge 1.x = x$
Les éléments de E *sont appelés* **vecteurs**, *les éléments de* $\mathbb{K}$ *sont appelés* **opérateurs** *ou* **scalaires**. *Le neutre pour* $+$ *est noté* 0. *« . » est appelé* **produit externe**.

Des exemples classiques sont : les vecteurs dans le plan ou l'espace usuel, le corps K lui-même avec pour produit externe le produit usuel, les polynômes sur K, éventuellement à plusieurs indéterminées ou de degré borné ; comme on le verra un peu plus loin avec les espaces produits, $\mathbb{K}^n$ muni des lois que l'on verra est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ; l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles (resp. complexes) aussi.

Les propriétés suivantes sont importantes :
• $0.x = 0$
• $\lambda.0 = 0$
• $\lambda.x = 0 \rightarrow \lambda = 0 \vee x = 0$
• $(-\lambda).x = \lambda.(-x) = -(\lambda.x)$
• $\lambda.(x - y) = \lambda.x - \lambda.y$
• $(\lambda - \mu)x = \lambda.x - \mu.x$

Définition 2 (Différentes notions dans un espace vectoriel) *On appelle* **segment** *d'extrémités x et y dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel l'ensemble des $t.x + (1-t).y$ pour $t \in [0,1]$. (la définition s'étend au cas d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel en utilisant t réel dans $[0,1]$).*
Une partie A d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) est dite **convexe** *si tout segment d'extrémités dans A est inclus dans A.*
Etant donnée A une partie convexe d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel une application f de A dans $\mathbb{R}$ est dite **convexe** *si étant donnés x et y dans A et t dans $[0,1]$ on a $f(t.x + (1-t).y) \leq t.f(x).(1-t).f(y)$. $-f$ est alors dite* **concave**.

Propriétés :
• L'intersection de deux convexes est un convexe.
• Une boule ouverte est convexe.
• Une boule fermée est convexe.
• Un segment est convexe.
• Une application f est convexe si l'ensemble des $(x, f(x))$ est convexe dans le produit $A \times \mathbb{R}$.
• Une application convexe sur un intervalle $]a, b[$ est continue
• $x \mapsto e^x$, $x \mapsto x^n$ sont convexes.
• $x \mapsto ln(x)$ est concave.


La notion de partie convexe est nécéssaire pour définir les fonctions convexes, dont on verra une foultitude d'applications en partie**??**. Cela servira aussi par exemple pour les résultats **??** (théorème de Cauchy), et surtout pour les théorème de Hahn-Banach(**??**) (aux multiples applications !). Une utilisation amusante de la convexité stricte sera donnée avec le résultat **??**.

Proposition 3 (Connexité dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé) *Une partie ouverte d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé est connexe si et seulement si elle est connexe par arcs si et seulement si entre tout x et tout y de cette partie il existe une ligne brisée.*

Démonstration : Il est clair que l'existence d'une ligne brisée implique l'existence d'un chemin (donc la connexité par arcs) qui implique à son tour la connexité. Il suffit donc de montrer que la connexité implique l'existence d'une ligne brisée.
• On se donne U une telle partie, connexe, supposée non vide (sinon le problème est trivial)
• On se donne x_0 dans U
• On note V l'ensemble des x que l'on peut joindre à x_0 par une ligne brisée.
• V est non vide (il contient x_0)
• V est ouvert (si x est dans V, alors $B(x, \epsilon) \subset U$ pour ϵ assez petit, et donc $B(x, \epsilon) \subset V$ - car dans toute boule est convexe).
• V est fermé ; en effet soit x dans U adhérent à V, alors il existe une boule ouverte centrée sur x intersectant V, donc x est dans V - car toute boule est convexe.
• V, fermé, ouvert, non vide d'un connexe U, est égal à U.□

La figure 1.1 illustre cette démonstration.

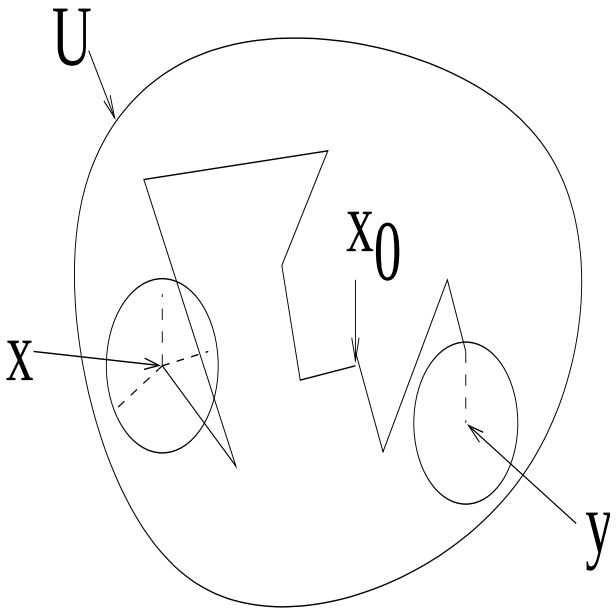

FIG. 1.1 – Illustration de la proposition 3. x est supposé dans V, y dans l'adhérence de V.

Proposition 4 (Distance dans un connexe ouvert d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé) *Soit U un ouvert connexe d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé . Si on note $d(x, y)$ l'inf des longueurs des lignes brisées joignant x à y, alors d est une distance et définit la même topologie que la norme.*

Démonstration : pas difficile du tout !□

Définition 5 (Espace vectoriel produit) *Le produit de n espaces vectoriels, muni de l'addition terme à terme et avec pour multiplication $\lambda.(x_1, ..., x_n) = (\lambda.x_1, ..., \lambda.x_n)$ est un espace vectoriel. On l'appelle* **espace vectoriel produit**.

Théorème 6 *L'ensemble des fonctions de A dans E, noté E^A, avec E $\mathbb{K}$-espace vectoriel, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. La somme de deux fonctions est la fonction qui à un élément associe la somme des deux images, et le produit d'un scalaire par une fonction est la fonction qui à un vecteur associe le produit du scalaire par l'image de ce vecteur.*

Démonstration : La preuve est pas bien difficile...□

Définition 7 (Sous-espaces vectoriels) *Une partie d'un espace vectoriel est un* **sous-espace vectoriel** *de cet espace lorsqu'elle est non vide, stable par addition et stable par multiplication par un scalaire.*

On note qu'on peut se contenter de vérifier que la partie est non vide et que si λ etμ sont des scalaires et si x et y lui appartiennent, alors $\lambda.x + \mu.y$ appartient aussi à l'ensemble.

Proposition 8 *Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel, et un espace vectoriel inclus dans un espace vectoriel (et muni des lois induites bien sûr) est un sous-espace vectoriel.*

Les polynômes de degré plus petit que n sont un sous-espace de l'ensemble des polynômes. L'espace des fonctions bornées sont un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de A dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des suites bornées de $\mathbb{K}$ est un sous-espace de l'espace des suites de $\mathbb{K}$. L'ensemble des suites presque nulles de $\mathbb{K}$ est aussi un sous-espace vectoriel de l'espace des suites de $\mathbb{K}$.

Proposition 9 *Une intersection quelconque de sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel.*

Cela permet d'introduire la définition suivante :

Définition 10 (Sous-espace vectoriel engendré) *On appelle* **sous-espace vectoriel** *engendré par une partie A l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels contenant A. On la note $Vect\ (A)$.*

1.2 Applications linéaires

Définition 11 (Application linéaire) *Une application f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel vers un autre est une* **application linéaire** *si :*
• $f(x+y) = f(x) + f(y)$
• $f(\lambda.x) = \lambda.f(x)$
Une application linéaire est aussi appelée **morphisme d'espaces vectoriels**, *ou* **morphisme algébrique**. *C'est en particulier un morphisme de groupes. Une application linéaire bijective est appelée* **isomorphisme**, *une application linéaire de E dans E est appelée* **endomorphisme**. *Un endomorphisme qui est aussi un isomorphisme est appelé* **automorphisme**. *L'inverse d'un isomorphisme est un isomorphisme, appelé* **isomorphisme réciproque**.
On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des morphismes de E dans F ; c'est un sous-espace vectoriel de F^E. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E. On note $Isom(E,F)$ l'ensemble des isomorphismes de E dans F. On note $Aut(E)$ l'ensemble des automorphismes de E ; il est noté $GL(E)$ une fois qu'on l'a muni de la composition. $GL(E)$ est un groupe, appelé **groupe linéaire**.
La notation $E \simeq F$ signifie qu'il existe un isomorphisme de E dans F.
L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel. On note $Ker\ f$ et on appelle **noyau** *de f l'image réciproque de $\{0\}$, c'est un sous-espace vectoriel. Une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est $\{0\}$. On notera que le noyau d'une application linéaire est le noyau du morphisme de groupes correspondant.*
On note Id la fonction identité de E ; c'est une application linéaire et un isomorphisme. On note $Invf$ **l' ensembles des invariants de** *f ; $Invf = Kerf - Id$. On note $Oppf$* **l'ensemble des vecteurs changés en leur opposé** *; $Oppf = Kerf + Id$.*
On appelle **homothétie de rapport λ d'un espace vectoriel** *E l'application $x \mapsto \lambda.x$.*

Quelques propriétés :
• On peut se contenter pour vérifier la linéarité d'une application d'assurer que $f(\lambda.x + \mu.y) = \lambda.f(x) + \mu.f(y)$
• L'image de 0 par une application linéaire est 0.
• L'identité est un automorphisme.
• L'image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel. On note $Im\ f$ l'image de f, c'est un sous-espace vectoriel.
• La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.
• L'application qui à f associe $g \circ f$ (resp. $f \circ g$) est un morphisme d'espaces vectoriels.
• $Ker\ f \subset Ker\ g \circ f$
• $Img \circ f = Img$
• $g \circ f = 0$ si et seulement si $Im\ f \subset Ker\ g$
• L'application qui à un polynôme associe son polynôme dérivé est un endomorphisme.

Définition 12 *On appelle n-**ième itérée de** f la fonction f^n. f est dit* **nilpotent** *si il existe n tel que $f^n = 0$. Le plus petit n convenable est appelé* **indice de nilpotence** *de f. On convient que l'indice de nilpotence d'une fonction non nilpotente est $+\infty$.*

Propriétés :
Si f est un endomorphisme nilpotent, alors $f - Id$ et $f + Id$ sont des automorphismes.

Définition 13 (Définitions dans le cas d'un espace vectoriel produit)
*On appelle k-**ième projection canonique** d'un espace vectoriel produit $E_1 \times ... \times E_n$ l'application qui à x dans le produit associe sa composante dans E_k.*
*On appelle k-**ième injection canonique** d'un espace vectoriel produit $E_1 \times ... \times E_n$ l'application qui à x dans E_k associe $(0, ..., 0, x, 0, ...0)$.*

On notera que si f_i est linéaire de E_i dans F_i, alors $(x_1, ..., x_n) \to (f_1(x_1), ..., f_n(x_n))$ est une application linéaire ; son noyau est le produit des noyaux.

1.3 Somme de sous-espaces vectoriels

1.3.1 Généralités

Définition 14 (Somme de sous-espaces vectoriels) *On se donne $F_1, ..., F_n$ des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E. L'application ϕ qui à $(x_1, ..., x_n)$ associe $(x_1 + x_2 + ... + x_n)$ est une application linéaire sur l'espace produit $F_1 \times ... \times F_n$. L'image de ϕ est appelée* **somme** *des sous-espaces vectoriels $F_1, ..., F_n$, et est notée $F_1 + ... + F_n$ ou $\sum_{i \in [1,n]} F_i$.*

Propriétés :
• La somme des F_i contient tous les F_i.
• L'espace vectoriel engendré par l'union des F_i est leur somme.

Définition 15 (Somme directe de sous-espaces vectoriels) *On dit que la somme de $F_1, ..., F_n$ est une* **somme directe** *lorsque la fonction ϕ est injective. Au lieu de noter $\sum F_i$ on peut alors noter $\bigoplus F_i$*

Propriétés :
• Cela revient à dire que tout vecteur de l'espace vectoriel somme s'écrit comme somme d'un élément de F_1, d'un élément de F_2, ... , d'un élément de F_n, cette décomposition étant unique.
• La somme est directe si et seulement si pour tout j $F_j \cap \sum_{i \neq j} F_i = \{0\}$.
• On peut encore simplifier ce critère ; la somme est directe si et seulement si pour tout

j $F_j \cap \sum_{i=1..j-1} F_i = \{0\}$.

1.3.2 Espaces supplémentaires

⊡ **Généralités**

Définition 16 *Deux sous-espaces vectoriels d'un espace E sont dits* **supplémentaires** *lorsque leur somme est directe et égale à E.*

Propriétés :
• Deux espaces sont supplémentaires si et seulement si leur intersection est $\{0\}$ et si leur somme est E.
• Deux espaces sont supplémentaires si l'application ϕ (voir la définition d'une somme de sous-espaces vectoriels) est bijective.
• Deux sous-espaces vectoriels qui sont supplémentaires d'un même sous-espace vectoriel sont isomorphes - preuve en considérant la projection sur le supplémentaire en question par rapport à l'un des deux sous-espaces ; un espace supplémentaire du noyau est isomorphe à l'image, d'où le résultat - les définitions nécessaires arrivent plus bas).
Exemples :
Dans $\mathbb{K}^n$, l'espace vectoriel engendré par un vecteur $(a_1, ..., a_n)$ est supplémentaire de l'espace vectoriel des $(x_1, ..., x_n)$ tels que $a_1.x_1 + ... + a_n.x_n = 0$.

⊡ **Applications aux applications linéaires. Projections, symétries.**

Théorème 17 *Deux applications linéaires ayant les mêmes restrictions à deux espaces vectoriels supplémentaires sont égales.*
Etant données deux applications linéaires définies respectivement de F_1 dans G et de F_2 dans G, avec F_1 et F_2 deux supplémentaires de E, il existe une et une seule application linéaire dont les restrictions à F_1 et F_2 soient ces applications.

Proposition 18 *Etant donné un sous-espace vectoriel H, f une application linéaire, alors $Ker\ f_{|H} = Ker\ f \cap H$*

Théorème 19 (Théorème noyau-image) *$Im\ f$ est isomorphe à tout supplémentaire de $Ker\ f$.*

Démonstration : Il suffit de considérer la restriction de f à un supplémentaire de $Ker\ f$, et de montrer l'injectivité et la surjectivité.□

Définition 20 (Projection) *On a vu que dans le cas où F et G étaient des espaces supplémentaires de E, pour tout x il existait un unique $(f, g) \in F \times G$ tel que $x = f + g$. On appelle* **projection sur** F **parallèlement à** G *l'application qui à x associe f.*

Définition 21 *On dit qu'un endomorphisme f est* **idempotent** *lorsque $f \circ f = f$. Un endomorphisme idempotent est aussi appelé* **projecteur**.

Propriétés :
Etant donné p projecteur, on a :
• $E = Ker\ p \oplus Im\ p$
• $Invp = Im\ p$
On note qu'une projection est un projecteur.

Proposition 22 *Un projecteur p est en fait la projection sur $Im\ p$ parallèlement à $Ker\ p$.*

Démonstration : Il suffit de considérer les propriétés ci-dessus, elles-mêmes facilement démontrables.□

Proposition 23 *$Id - f$ est un projecteur si et seulement si f est un projecteur.*

Démonstration : Il suffit de développer $(Id - f)^2$.□

Définition 24 (Projecteurs associés) *Deux projecteurs sont dits* **projecteurs associés** *lorsque leur somme est l'identité.*

Proposition 25 *Si f et g sont deux projecteurs associés, alors $Im\ f = Ker\ g$ et $Im\ g = Ker\ f$.*

Définition 26 (Symétrie) *A et B étant supplémentaires, on appelle* **symétrie** *par rapport à A parallèlement à B l'endomorphisme s tel que $s_{|A} = Id$ et $s_{|B} = -Id$.*

On a vu plus haut qu'un endomorphisme pouvait être défini par ses restrictions sur deux espaces supplémentaires.

Définition 27 (Involution) *Un endomorphisme f est une* **involution** *lorsque $f \circ f = Id$.*

Définition 28 *Une symétrie s et un projecteur p sont dits* **associés** *lorsque $s = 2.p - Id$.*

C'est le cas lorsque s et p se font par rapport au même espace et parallèlement au même espace.

Propriétés :
• Une symétrie est une involution
• Etant donnée s symétrie, $E = Inv\ s \oplus Opp\ s$
• s est la symétrie par rapport à $Inv\ s$ et parallèlement à $Opp\ s$.
• Toute symétrie est associée à un projecteur, et tout projecteur est associée à une symétrie.

⊡ Dilatations, transvections

Définition 29 *Soit H un hyperplan d'un espace vectoriel E, et D une droite supplémentaire de H. On appelle* **dilatation d'hyperplan H, de direction D et de rapport λ** *l'application linéaire dont la restriction à H est l'identité et dont la restriction à D est l'homothétie de rapport λ.*
Soit H un hyperplan d'un espace vectoriel E, et h une forme linéaire de noyau H. On appelle **transvection d'hyperplan** *H une application de E dans E de la forme*

$$x \mapsto x + h(x).u$$

pour un certain u dans H.

⚠ Ne pas se méprendre sur la notion de transvection d'hyperplan H ; il existe plusieurs transvections différentes d'hyperplan H.

Rappelons que la proposition **??** signale que $GL(E)$ est engendré par les transvections et les dilatations, et que $SL(E)$ est engendré par les transvections.

1.4 Espace vectoriel quotient

1.4.1 Généralités

Définition 30 *Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors la relation définie par*

$$x\mathcal{R}y \iff x - y \in F$$

est une relation d'équivalence compatible avec l'addition et le produit externe. L'ensemble quotient est un espace vectoriel pour les lois induites ; il est appelé **espace vectoriel quotient** *et est noté $E_{/F}$.*

Propriétés :

- La surjection canonique qui à x associe $\overline{x}$ est linéaire. Son noyau est F.
- Si F et G sont supplémentaires, alors G est isomorphe à $E_{/F}$.

1.4.2 Application aux applications linéaires

Théorème 31 *Etant donné une application linéaire f de E dans F, alors f s'écrit de manière unique $f = i \circ b \circ s$, avec s la surjection canonique de E dans $E_{/Ker\ f}$, i l'injection canonique de $Im\ f$ dans F, et g un isomorphisme de $E_{/Ker\ f}$ dans Imf.*

Démonstration : Facile ! □

1.5 Translations - espaces affines

Pour plus d'informations on pourra consulter la partie**??**.

Définition 32 (Translations) *On appelle* **translation** *de vecteur a l'application d'un espace affine X dans lui-même qui à x associe $x+a$. On note $\mathcal{T}(E)$ l'ensemble des translations de E.*
On appelle **sous-espace affine** *de E l'image d'un sous-espace vectoriel de E par une translation de E.*
On appelle **direction d'un sous-espace affine** *l'ensemble des $x-y$ pour x et y dans l'espace affine.*
On dit qu'un sous-espace affine A est **parallèle** *à un sous-espace affine B si et seulement si A est vide ou la direction de A est incluse dans la direction de B.*
On dit que deux sous-espaces affines sont **parallèles** *s'ils sont non vides et ont même direction.*
On dit que deux sous-espaces affines sont **strictement parallèles** *s'ils sont non vides et ont même direction et sont distincts.*

Propriétés :
• $(\mathcal{T}(E),\circ)$ est un groupe commutatif. $(\mathcal{T}(E),\circ)\simeq(E,+)$.
• Un sous-espace affine de E contient 0 si et seulement si c'est un sous-espace vectoriel (en le munissant des lois induites).
• Si un espace affine A est de la forme $a+F$, alors il est aussi de la forme $x+F$ pour tout x de A.
• Le sous-espace affine A est égal à $a+F$, avec a quelconque dans A, et F la direction de A.
• Etant donnés A et B deux espaces affines, $a\in A$ et $b\in B$, de direction respectives F et G, alors $A\cap B\neq\emptyset \iff b-a\in F+G$
• Etant donnés deux espaces affines d'intersection non vide, l'intersection est un espace affine de direction l'intersection de leurs directions.
• Si A est parallèle à B alors $A\cap B=\emptyset$ ou $A\subset B$.

1.6 Familles libres. Familles génératrices. Bases

1.6.1 Généralités

Définition 33 *Un élément x de l'espace vectoriel E est dit* **combinaison linéaire** *d'une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E si il existe un entier n, un n-uplet $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ d'éléments de $\mathbb{K}$, et un n-uplet $(i_1, ..., i_n)$ d'éléments de I tels que $x = \sum_{1\leq j\leq n} \lambda_j x_{i_j}$.*
Un élément x est dit **combinaison linéaire** *d'un sous-ensemble A de E si x est combinaison linéaire d'une famille d'éléments de A.*
Une famille d'éléments d'un sous-espace vectoriel F est dite **famille génératrice** *de F si l'espace vectoriel engendré par cette famille est F.*
Une famille d'éléments de E est dite **famille libre** *si une combinaison linéaire de cette famille est nulle si et seulement si chaque λ_i est nul.*
Une famille est dite **famille liée** *quand elle n'est pas libre.*

Propriétés :
• L'image d'une famille génératrice de F par une application linéaire f est une famille génératrice de $f(F)$.
• L'ensemble des combinaisons linéaires de A est l'espace vectoriel engendré par A.
• Toute famille contenant le vecteur nul est liée.
• Les éléments d'une famille libre sont deux à deux distincts.
• Une famille est liée si et seulement si un de ses éléments est combinaison linéaire des autres.
• Une famille est liée si et seulement si un de ses éléments appartient à l'espace vectoriel engendré par les autres.
• Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
• Toute sur-famille d'une famille liée est liée.

Théorème 34 • *L'image d'une famille liée par une application linéaire est une famille liée.*
• *L'image d'une famille libre par une application injective est une famille libre.*

Le théorème suivant, facile à démontrer, est fondamental pour la suite.

Théorème 35 • *Etant donnée une famille libre et un élément appartenant à l'espace vectoriel engendré par cette famille, alors cet élément s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire d'éléments de la famille.*

Définition 36 (Base) *Une base d'un espace vectoriel E est une famille libre et génératrice.*

Proposition 37 *Une famille est une base si et seulement si c'est une famille libre maximale (au sens de l'inclusion).*

Démonstration : Si elle est pas maximale, on peut ajouter un élément tout en la laissant libre ; on en déduit que ce n'est pas une famille génératrice. Si elle n'est pas génératrice, alors on peut ajouter un élément n'appartenant pas à l'espace engendré ; cette nouvelle famille est aussi libre, donc la précédente n'était pas maximale.□

Proposition 38 *Une famille est une base si et seulement si c'est une famille génératrice minimale.*

Démonstration : Même principe que la preuve ci-dessus.□

Définition 39 *Etant donnée une base (e_i) d'un espace vectoriel F et un élément x de F, il existe une unique famille (λ_i) de support fini telle que $x = \sum \lambda_i e_i$. Les λ_i sont appelés* **coordonnées** *du vecteur x.*

1.6.2 Applications aux applications linéaires

Théorème 40 *Etant donnée $(f_i)_{i\in I}$ une base de F et $(g_i)_{i\in I}$ une famille de G, il existe une unique application linéaire f de F dans G telle que $f(f_i) = g_i$ pour tout $i \in I$.*
- *La famille (g_i) est libre si et seulement si f est injective.*
- *La famille (g_i) est génératrice si et seulement si f est surjective.*
- *La famille (g_i) est une base de G si et seulement si f est bijective.*

1.6.3 Applications aux sous-espaces vectoriels

Proposition 41 *L'ensemble $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E muni de l'addition, de la composition, et de la multiplication par un scalaire, est une algèbre.*

Attention, cette algèbre n'est pas commutative (en général).

1.7 Dualité

1.7.1 Définitions et premières propriétés. Le dual et le bidual

Définition 42 *On appelle* **forme linéaire** *sur un K-espace vectoriel E une application linéaire de E dans K.*
On appelle **dual** *d'un K-espace vectoriel E l'ensemble E^* des formes linéaires sur cet espace vectoriel.*
On appelle **hyperplan** *tout sous-espace vectoriel admettant une droite pour supplémentaire.*
On appelle **bidual** *d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel le dual de son dual. On le note E^{**}.*
On appelle **application linéaire canonique** *de E dans E^{**} l'application qui à x associe $\phi_x : u \mapsto u(x)$ (on vérifiera facilement que c'est une application linéaire).*

Propriétés :
• Une forme linéaire non nulle est surjective.
• Un sous-espace vectoriel est un hyperplan si et seulement si tout droite vectorielle passant par un vecteur appartenant à son complémentaire est un supplémentaire de cette droite.
• Un sous-espace vectoriel est un hyperplan si et seulement si c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle.
• Deux formes linéaires non nulles sont liées (dans le dual) si et seulement si elles ont même noyau.
• Etant données u et v des formes linéaires sur E, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda v$ si et seulement si $Ker\ u \subset Ker\ v$.

1.7.2 Orthogonalité

Définition 43 *Etant donné x dans E et u dans E^*, on dit que x et u sont* **orthogonaux** *si et seulement si $u(x) = 0$*
Etant donnée une partie non vide A de E, on appelle **orthogonal** *de A dans E^* et on note $A^\perp$ l'ensemble des u orthogonaux à tous les éléments de A.*
Etant donnée une partie non vide A de E^* on appelle **orthogonal** *de A dans E et on note A^o l'ensemble des x orthogonaux à tous les éléments de A.*

Propriétés :
J'utilise le terme orthogonal sans plus de précision lorsque la propriété vaut à la fois dans le cas de l'orthogonal d'une partie de E dans le dual et dans le cas de l'orthogonal d'une partie du dual E^* dans E.
Il n'y a pas ici de bidualité ; l'orthogonal d'une partie du dual E' est à considérer dans E.
• L'orthogonal d'une partie est l'orthogonal de l'espace engendré par cette partie.

• L'orthogonal d'une partie est un sous-espace vectoriel.
• Toute partie est incluse dans l'orthogonal de son orthogonale.
• $A \subset B$ alors l'orthogonal de B est inclus dans l'orthogonal de A.
• L'intersection des orthogonaux est l'orthogonal de l'union.

⚠ Attention, ne pas confondre l'orthogonal de l'orthogonal de A $A^{\perp^o}$ et l'orthogonal de l'orthogonal de A $A^{\perp\perp}$.

1.8 Transposition

Définition 44 *Etant donnée f une application linéaire de E dans F on appelle* **transposée de** *f l'application de F^* dans E^* qui à v associe $v \circ f$. C'est une application linéaire, et on la note ${}^t f$.*

Propriétés :
• L'application qui à f associe ${}^t f$ est une application linéaire.
• ${}^t(g \circ f) = {}^t f \circ {}^t g$
• ${}^t Id_E = Id_{E^*}$
• Si f est un isomorphisme, ${}^t f$ est un isomorphisme, et ${}^t(f^{-1}) = ({}^t f)^{-1}$
• $Ker\, {}^t f = (Im\, f)^\perp$
• f est surjective si et seulement si ${}^t f$ est injective.

1.9 $\mathbb{K}$-algèbres

1.9.1 Définitions et généralités

Définition 45 ($\mathbb{K}$-algèbre) $(A, +, \times, .)$ *est une* **$\mathbb{K}$-algèbre** *si*
• $(A, +, .)$ *est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel*
• $(A, +, \times)$ *est un anneau*
• $(\lambda.a) \times b = a \times (\lambda.b) = \lambda.(a \times b)$
La $\mathbb{K}$-algèbre est en outre **commutative** *lorsque $\times$ est commutative.*

L'ensembles des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-algèbre commutative. L'espace vectoriel des applications de A dans $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$ algèbre commutative.

Définition 46 (Morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres) *Un* **morphisme d'algèbre** *est une application qui est à la fois un morphisme d'anneaux sur les anneaux sous-jacents et un morphisme d'espaces vectoriels sur les espaces vectoriels sous-jacents.*

1.10 Résultats d'algèbre linéaire

• L'union de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel si et seulement si l'un des deux est inclus dans l'autre.

• Etant donnés deux projecteurs, la somme est un projecteur si et seulement si les composés de ces projecteurs (dans les deux sens, la composition n'étant pas commutative) sont nulles. Dans ce cas le noyau de la somme est l'intersection des noyaux, et l'image de la somme est la somme directe des images.

• Etant donnés F et G des espaces vectoriels et f et g des vecteurs alors $f + F \subset g + G$ si et seulement si $F \subset G \wedge f - g \in G$.

Définition 47 *On appelle* **homothétie vectorielle de rapport** k *l'application qui à* x *associe* $k.x$ *; un endomorphisme* f *est une homothétie vectorielle si et seulement si pour tout* x *la famille* $(x, f(x))$ *est liée.*

Démonstration : On procède par étapes :
• tout d'abord montrer que pour tout x il existe $k_x \in K$ tel que $f(x) = k_x.x$.
• ensuite montrer que k_x est constant sur toute droite vectorielle.
• développer $f(x + y)$ avec (x, y) une famille libre. On en déduit $k_x = k_y$.□

• La famille des fonctions f_a de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe 1 si $x > a$ et 0 si $x \leq a$ est libre.

Démonstration : On suppose qu'une telle fonction est combinaison linéaire d'un nombre fini d'autres fonctions, et on constate que la fonction doit être continue là où justement elle ne l'est pas...□

1.11 Exercices d'algèbre linéaire

Quelques résultats pour s'habituer aux manipulations sur les polynômes d'endomorphismes et aux sommes d'espaces :

$$f^2 - 5.f + 6.Id = 0 \rightarrow E = Ker(f - 2.Id) \oplus Ker(f - 3.Id)$$

(f est un endomorphisme)

Pour s'habituer aux manipulations sur les noyaux et les images :
(f est un endomorphisme)

$$Ker\ f = Ker\ f^2 \iff Im\ f \cap Ker\ f = \{0\}$$
$$Im\ f = Im\ f^2 \iff Im\ f + Ker\ f = \{0\}$$
$$n \mapsto Ker\ f^n \text{ est croissante}$$
$$n \mapsto Im\ f^n \text{ est décroissante}$$
$$\exists n / Ker\ f^n = Ker\ f^{n+1} \rightarrow \forall k > n\ Ker\ f_k = Ker\ f_n$$
$$\exists n / Im\ f^n = Im\ f^{n+1} \rightarrow \forall k > n\ Im\ f_k = Im\ f_n$$

Chapitre 2

Algèbre multilinéaire

Pour la suite il est utile de connaître quelques bases sur σ_n ; que l'on trouvera à la partie**??**. Les premières sections, de type fondements théoriques pour la suite, sont un juste rapidement ébauchées.

2.1 Généralités

Définition 48 (Application multilinéaire) *Soient E_1, ... , E_n et F des $\mathbb{K}$-espace vectoriel , alors $f : \Pi_{i\in[1,n]}E_i \to F$ est n-**linéaire** si pour tout (x_i) dans ΠE_i et tout j l'application $x \to f(x_1, ..., x_{j-1}, x, x_{j+1}, ..., x_n)$ est linéaire.*
*Si $E_1 = E_2 = ...E_n$ ont dit que f est une **application** n-**linéaire** sur E.*
*Si F est le corps $\mathbb{K}$, alors f est dite **forme** n-**linéaire**.*
On note $L_n(E, F)$ l'ensemble des applications n-linéaires de E dans F.
On note $L_n(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires sur E, c'est à dire $L_n(E, \mathbb{K})$.
Etant donné $f \in L_n(E, F)$ et $\sigma \in \sigma_n$ on note f_σ l'application n-linéaire $(x_1, ..., x_n) \mapsto f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(n)})$.
*Une application n-linéaire est dite **symétrique** si pour tout σ $f_\sigma = f$.*
*Une application n-linéaire est dite **antisymétrique** si pour tout σ $f_\sigma = \epsilon(s).f$.*
*Une application n-linéaire est dite **alternée** si $i \neq j$ et $x_i = x_j$ implique $f(x_1, ..., x_n) = 0$.*

On note $S_n(E, F)$ l'ensemble des applications n-linéaires symétriques de E dans F et $A_n(E, F)$ l'ensemble des applications n-linéaires alternées de E dans F.
On note $S_n(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires symétriques sur E et $A_n(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E.

⚠ Une application p-linéaire n'est pas une application linéaire.

Proposition 49 *] • $L_p(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , sous-espace vectoriel de F^{E^p}.*
• f est symétrique si et seulement si pour toute transposition τ $f_\tau = f$.
• f est antisymétrique si et seulement si pour toute transposition τ $f_\tau = -f$.

Démonstration : Premier point évident, les deux points suivants demandent juste de se rappeler que les transpositions engendrent σ_n. On pourrait en fait utiliser d'autres familles génératrices.□

Proposition 50 *Une application n-linéaire alternée est antisymétrique ; si $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2, la réciproque est vraie aussi.*

Démonstration : Supposons f n-linéaire, et $x_i = x_j$, avec $i \neq j$.

$$0 = f(x_1, ..., x_i + x_j, ..., x_j + x_i, ..., x_n)$$

(car f est alternée)

$$0 = f(x_1, ..., x_i, ..., x_i, ..., x_n)$$
$$+f(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n)$$

$$+f(x_1,...,x_j,...,x_j,...,x_n)$$
$$+f(x_1,...,x_j,...,x_i,...,x_n)$$

(car f est n-linéaire) or $f(x_1,...,x_i,...,x_i,...,x_n) = f(x_1,...,x_j,...,x_j,...,x_n) = 0$ puisque f est alternée
donc $f(x_1,...,x_i,...,x_j,...,x_n) = -f(x_1,...,x_j,...,x_i,...,x_n)$.

Par la proposition 49, le résultat alterné $\rightarrow$ antisymétrique est donc prouvé. La réciproque est évidente, en utilisant la même caractérisation de l'antisymétrie par la proposition 49.□

On suppose désormais que $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique $\neq 2$.

Théorème 51 *Soit ϕ une forme n-linéaire antisymétrique sur E $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $e_1,...,e_n$ une base de E, $e_1^*,...,e_n^*$ sa base duale et $x_1,...,x_n$ une famille de n éléments de E.*
Alors :

$$\phi(x_1,...,x_n) = (\sum_{\sigma\in\sigma_n} \epsilon(s).\Pi_{i=1}^n e^*_{\sigma(i)}(v_i)).\phi(e_1,...,e_n)$$

et

$$\phi(x_1,...,x_n) = (\sum_{\sigma\in\sigma_n} \epsilon(s).\Pi_{i=1}^n e^*_i(v_{\sigma(i)})).\phi(e_1,...,e_n)$$

Démonstration : On procède en quatre étapes :
• On remplace x_j par $\sum_i e_i^*(x_j).e_i$ dans $\phi(x_1,...,x_n)$.
• On développe en utilisant la linéarité suivant chaque composante, on obtient donc

$$\sum_{(i_1,...,i_n)\in[1,n]^n} e^*_{i_1}(x_1).e^*_{i_2}(x_2).....e^*_{i_n}(x_n).\phi(e_{i_1},...,e_{i_n})$$

• On supprime tous les termes tels que le cardinal de $\{i_1,...,i_n\}$ soit différent de n, ce qui permet d'introduire les permutations.
• Il ne reste plus qu'à remplacer $\phi(e_{i_1},...,e_{i_n})$ par $\epsilon(\sigma).\phi(e_1,...,e_n)$.
La deuxième formule s'obtient simplement en remplaçant σ par σ^{-1}.□

Définition 52 (Symétrisé et antisymétrisé d'une forme n-linéaire) *Soit f une forme n-linéaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.*
Alors l'application $S(f)$ égale à $(x_1, ..., x_n) \mapsto \sum_{\sigma \in \sigma_n} f_\sigma(x_1, ..., x_n)$ est appelée **symétrisée** *de f ; elle est symétrique.*
Alors l'application $A(f)$ égale à $(x_1, ..., x_n) \mapsto \sum_{\sigma \in \sigma_n} \epsilon(\sigma).f_\sigma(x_1, ..., x_n)$ est appelée **antisymétrisée** *de f ; elle est alternée.*
L'application $f \mapsto S(f)$ est appelée **opérateur de symétrisation**.
L'application $f \mapsto A(f)$ est appelée **opérateur d'antisymétrisation**.

Définition 53 (Produit tensoriel, produit symétrique, produit extérieur)
Soient $f_1, ..., f_n$ des formes linéaires sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
On appelle **produit tensoriel de** *$(f_1, ..., f_n)$ l'application qui à $(x_1, ..., x_n)$ associe $f_1(x_1) \times f_2(x_2)... \times f_n(x_n)$. On le note $f_1 \otimes f_2 \otimes ... \otimes f_n$.*
L'aplication symétrisée du produit tensoriel est appelée **produit symétrique** *de $(f_1, ..., f_n)$; on la note $f_1.f_2.....f_n$.*
L'application antisymétrisée du produit tensoriel est appelée **produit extérieur** *de $(f_1, ..., f_n)$; on le note $f_1 \wedge f_2 \wedge ... \wedge f_n$.*
Une application n-linéaire exprimable comme produit tensoriel est dite décomposable dans $L_n(E)$.
Une application n-linéaire exprimable comme produit symétrique est dite décomposable dans $S_n(E)$.
Une application n-linéaire exprimable comme produit extérieur est dite décomposable dans $A_n(E)$.

Proposition 54 • *Le produit symétrique de n formes linéaires est symétrique.*
• *Le produit extérieur de n formes linéaires est antisymétriques.*
• *L'application qui à n formes linéaires associe leur produit tensoriel est n-linéaire de E^{*n} dans $L_n(E)$.*
• *L'application qui à n formes linéaires associe leur produit symétrique est n-linéaire symétrique.*
• *L'application qui à n formes linéaires associe leur produit extérieur est n-linéaire alternée.*

Quelques théorèmes donnés sans démonstration :

Théorème 55 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $(e_1, ..., e_n)$ une base de E, $(e_1^*, ..., e_n^*)$ sa base duale. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications de $[1, p]$ dans $[1, n]$. Pour tout f dans $\mathcal{F}$ on note $e_f = e^*_{f(1)} \otimes e^*_{f(2)} \otimes \cdots \otimes e^*_{f(p)}$. Alors la famille des e_f pour $f \in \mathcal{F}$ est une base de $L_p(E)$.*

Définition 56 *La base donnée par le théorème précédent est appelée* **base associée à** $(e_1, ..., e_n)$.

Corollaire 57 *La dimension de* $L_p(E)$ *est* $(dim\ E)^n$.

Théorème 58 *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* n*,* $(e_1, ..., e_n)$ *une base de* E*,* $(e_1^*, ..., e_n^*)$ *sa base duale.* $\mathbb{K}$ *est supposé de caractéristique nulle.*
On note A *l'ensemble des applications* f *de* $[1, n]$ *dans* $[0, p]$ *telles que* $\sum_{i=1}^{n} f(i) = p$*. Alors on note* $e_f = e_1^{f(1)}.e_2^{f(2)}.....e_n^{f(n)}$.
Alors la famille des e_f *pour* $f \in A$ *forme une base de* $S_p(E)$.

Corollaire 59 *La dimension de* $S_p(E)$ *est égale à* $C^p_{dim\ E+p-1}$.

Théorème 60 *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* n*,* $(e_1, ..., e_n)$ *une base de* E*,* $(e_1^*, ..., e_n^*)$ *sa base duale.* $\mathbb{K}$ *est supposé de caractéristique nulle.*
On note A *l'ensemble des applications* f *strictement croissantes de* $[1, p]$ *dans* $[1, n]$*. Alors on note* $e_f = e_{f(1)}.e_{f(2)}.....e_{f(n)}$.
Alors la famille des e_f *pour* $f \in A$ *forme une base de* $S_p(E)$.

Corollaire 61 *Si* E *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* n *et si* $\mathbb{K}$ *est de caractéristique nulle, alors* $dim\ A_p(E) = C_n^p$.

2.2 Algèbre multilinéaire et topologie

Définition 62 *Etant donnés* E_1*, ... ,* E_n *et* F *des espaces vectoriels normés , on note* $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ *l'espace des applications* n*-linéaires continues de* $E_1 \times ... \times E_n$ *dans* F*. On le norme par* $f \mapsto sup_{\forall i \|x_i\| \leq 1} \|f(x_i)$ *; on obtient ainsi un espace vectoriel normé .*

Théorème 63 (Quelques théorèmes (pas durs !) sans preuve) • *Soient* E_1, *... ,* E_n *et* F *des espaces vectoriels normés , et soit* f *application* n*-linéaire de* $E_1, ..., E_n$ *dans* F*. Alors :*
- f *est continue si et seulement si* f *est continue en* 0
- f *est bornée sur le produit des boules unités des* E_i

• *Si* F *est un espace de Banach, alors* $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ *est un espace de Banach.*

• *Etant donnée* f *application* n*-linéaire continue de* $E_1 \times ... \times E_n$ *dans* F *la différentielle de* f *en* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *est* $(h_1, ..., h_n) \mapsto f(h_1, x_2, ..., x_n) + f(x_1, h_2, x_3, ..., x_n) + ... + f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, h_n)$.

• $\mathcal{L}(E_1, E_2; F) \simeq \mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}(E_2; F))$.

2.3 Déterminants

2.3.1 Déterminant d'une famille de vecteurs

On suppose E $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Définition 64 *On appelle* **déterminant** *d'une famille* $(x_1, ..., x_n)$ *d'éléments de* E *dans une base* $(e_1, ..., e_n)$ *de* E *la somme :*

$$\sum_{\sigma \in \sigma_n} \epsilon(\sigma) \Pi_{i=1}^n e^*_{\sigma(i)}(x_i)$$

On le note $det_{(e_1,...,e_n)}(x_1, ..., x_n)$.

Proposition 65 *Si* f *est* n*-linéaire sur* E*, alors* $\sum_{\sigma \in \sigma_n} \epsilon(\sigma).f_\sigma$ *est* n*-linéaire et antisymétrique.*

Démonstration : La somme est trivialement n-linéaire, et l'antisymétrie se montre facilement (on rappelle juste que la signature du produit de deux permutations est le produit des signatures de ces deux permutations).□

On suppose pour la suite que $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2.

Théorème 66 • *Etant donnée une base B de E, il existe une et une seule forme n-linéaire alternée égale à 1 sur B ; c'est $det_B(.)$.*
• *Les formes n-linéaires alternées sur E sont égales à multiplication par un scalaire près.*

Démonstration : • Il est clair que $det_B(B) = 1$
• La proposition précédente nous assure que $det_B(.)$ est n-linéaire alternée.
• Le théorème 51 nous assure le deuxième point.□

En conclusion, on a les propriétés élémentaires suivantes du déterminant dans une base B :

Proposition 67 • *Le déterminant est n-linéaire alterné.*
• *On ne change pas le déterminant des x_i en ajoutant à un des x_i une combinaison linéaire des autres x_j.*
• *Le déterminant de $(x_1, ..., x_n)$ est égal à $\epsilon(\sigma)$ fois le déterminant de $(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)})$.*
• $det_B = det_B(B').det_{B'}$
• $det_B(B').det_{B'}(B) = 1$
• *La famille des x_i est une base si et seulement si $det_B(x_1, ..., x_n) \neq 0$*

Démonstration : (simplement du dernier point, les autres se montrant facilement l'un après l'autre)
Si c'est une base, alors on applique la formule juste au dessus pour conclure que le déterminant est non nul.
Si le déterminant est non nul, alors supposons la famille liée, on peut ajouter à un vecteur une combinaison linéaire des autres et on a ainsi une famille dont un vecteur est nul, et donc le déterminant devrait être nul.□

2.3.2 Déterminant d'un endomorphisme

E est toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de deux.

Définition 68 *On appelle* **déterminant de l'endomorphisme** f *le déterminant de $f(B)$ dans la base B ; on le note $det\ f$.*
On appelle **groupe spécial linéaire de** E *l'ensemble des endomorphismes de E de déterminant 1 ; on le note $SL(E)$.*

Démonstration : Il convient pour que la définition ait un sens de démontrer que ce déterminant ne dépend pas de la base B. On suppose donc données deux bases B et B', et on montre que $det_B(f(B)) = det_{B'}(f(B'))$.

• La fonction qui à un n-uple $x \in E^n$ associe $det_B(f(x))$ est n-linéaire alternée, donc c'est $\lambda.det_B$.
• En spécialisant en B cette égalité, on obtient

$$det_B(f(x)) = det_B(f(B)).det_B(x)$$

• Or par les propriétés du déterminant on a

$$det_B(x) = det_B(B').det_{B'}(x)$$

$$det_B(f(x)) = det_B(B').det_{B'}(f(x))$$

• Des deux points précédents on déduit

$$det_B(B').det_{B'}(f(x)) = det_B(f(B)).det_B(B').det_{B'}(x)$$

c'est-à-dire $det_{B'}(f(x)) = det_B(f(B)).det_{B'}(x)$, et donc $det'_B(f(B')) = det_B(f(B))$ en spécialisant en B'.□

Proposition 69 • $det\ f \circ g = det\ f.det\ g$
• *f est un automorphisme si et seulement si* $det\ f \neq 0$
• *Si* $det\ f \neq 0$*, alors f est un automorphisme et* $det\ f^{-1} = \frac{1}{det\ f}$
• det *est un morphisme de groupe entre* $GL(E)$ *et* $\mathbb{K} \setminus \{0\}$.
• $SL(E)$*, puisqu'il est le noyau du déterminant, est un sous-groupe de* $GL(E)$

2.3.3 Déterminant d'une matrice

On travaille encore dans un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2.

Définition 70 *On appelle* **déterminant** *d'une matrice carrée M le déterminant de l'endomorphisme canonique associé à M dans $\mathbb{K}^n$. On le note $det\ M$ ou $|M|$.*
On appelle **groupe spécial linéaire d'ordre** *n et on note $SL_n(K)$ l' ensemble des matrices de déterminant égal à 1.*

Proposition 71 *Le déterminant d'une matrice est aussi le déterminant de ses vecteurs-colonnes ou de ses vecteurs-lignes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.*

Les propriétés suivantes se déduisent facilement des propriétés équivalentes chez les endomorphismes ou les familles de vecteurs :
• Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.
• Le déterminant du produit est le produit des déterminants.
• $SL_n(K)$ est un sous-groupe de $GL_n(K)$, noyau du déterminant en tant que morphisme de groupe de $GL_n(K)$ vers $\mathbb{K} \setminus \{0\}$.

• Deux matrices semblables ont même déterminant.

Proposition 72 *Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments diagonaux.*

Démonstration : Il suffit de voir que seule la permutation identité est telle que pour tout i $M_{\sigma(i),i}$ soit non nul.□

2.3.4 Pratique du calcul d'un déterminant ; développement suivant une ligne ou une colonne

Le point de vue adopté ici est celui du calcul du déterminant d'une matrice de type (n, n) sur un corps $\mathbb{K}$; bien sûr il faut bien voir qu'il en va de même du calcul du déterminant d'un endomorphisme ou d'une famille de vecteurs dans une base.

Pour la suite il est nécessaire d'avoir lu le début de la partie 4.3.10.

Proposition 73 (Développement suivant une colonne)

$$\forall j \in [1,n] det\ M = \sum_{i\in[1,n]} \gamma_{i,j}.M_{i,j}$$

Démonstration : Il suffit de se rappeler que le déterminant est n-linéaire.□

Proposition 74 (Développement suivant une ligne)

$$\forall i \in [1,n] det\ M = \sum_{j\in[1,n]} \gamma_{i,j}.M_{i,j}$$

Démonstration : Il suffit de se rappeler que $det\ M = det\ {}^tM$.□

Proposition 75

$$det\ \tilde{M} = det\ com(M) = (detM)^{n-1}$$

Démonstration : • Si $\tilde{M}$ est inversible et pas M, alors $\tilde{M}.M = (det\ M).I = 0$ et donc $M = 0$, et donc $\tilde{M} = 0$, d'où contradiction.
• Si $\tilde{M}$ et M ne sont pas inversibles ni l'une ni l'autre, alors les déterminants sont égaux à 0, et l'égalité annoncée est vérifiée.
• Si M est inversible, alors

$$\tilde{M}.M = (det\ M).I$$
$$det\ (\tilde{M}.M) = det((det\ M).I)$$

$$det\ (\tilde{M}).det\ M = (det\ M)^n$$
$$det\ \tilde{M} = (det\ M)^{n-1}$$

D'où le résultat annoncé.□

2.4 Algèbre bilinéaire

On travaillera avec un corps $\mathbb{K}$ sympathique, comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.4.1 Formes bilinéaires

⊡ **Le cas général**

Définition 76 *On appelle* **forme bilinéaire sur** E *une forme multilinéaire de* $\mathcal{L}_2(E)$.
Etant donnée ϕ *une forme bilinéaire on note* ${}^t\phi$ *l'application* $(x, y) \to \phi(y, x)$.

Il est immédiat que ϕ est symétrique si $\phi = {}^t\ \phi$, et que ϕ est antisymétrique si ${}^t\phi = -\phi$.

Proposition 77 • *L'application qui à* ϕ *associe* ${}^t\phi$ *est un automorphisme involutif de* $\mathcal{L}_2(E)$.
• $\mathcal{L}_2(E)$ *est somme directe des deux sous-espace vectoriel de* $\mathcal{L}_2(E)$ *respectivement constitués des formes bilinéaires symétriques et des formes bilinéaires antisymétriques. On a en fait* $\phi = a + s$ *avec* $s = \frac{{}^t\phi+\phi}{2}$, $a = \frac{\phi-{}^t\phi}{2}$, a *antisymétrique, et* s *symétrique.*

⊡ **Le cas de la dimension finie - expression matricielle**

On travaille maintenant avec E $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. On se donne une base $(e_1, ...e_n)$ une base de E.

Définition 78 *Etant donné ϕ une forme bilinéaire sur E, on appelle* **matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B}$** *la matrice M définie par*

$$M_{i,j} = \phi(e_i, e_j)$$

On la note $Mat_B(\phi)$.
Réciproquement, on appelle **forme bilinéaire sur E associée à la matrice M et à la base B** *l'application ϕ définie par*

$$\phi(x, y) = {}^t X.M.Y$$

avec X le vecteur défini par $X_i = e_i^*(x)$ et Y le vecteur défini par $Y_i = e_i^*(y)$. La forme bilinéaire canoniquement associée à une matrice M de type (n, n) est la forme bilinéaire associée à cette matrice dans $\mathbb{K}^n$ pour la base canonique.

Proposition 79 *Avec M la matrice de ϕ dans la base B, avec X le vecteur défini par $X_i = e_i^*(x)$ et Y le vecteur défini par $Y_i = e_i^*(y)$, on a*

$$\phi(x, y) = {}^t X.M.Y$$

Démonstration : Il n'y a qu'à l'écrire.□

Corollaire 80 *La matrice de ${}^t\phi$ est la transposée de la matrice de ϕ.*

Proposition 81 *Etant donnée B une base de E, l'application qui à une matrice associe la forme bilinéaire associée sur E pour B est un isomorphisme.*

Corollaire 82 $dim\ \mathcal{L}_2(E) = n^2$

Proposition 83 *Etant donnée B et B' deux bases de E, alors*

$$Mat_{B'}(\phi) = {}^t P_{B,B'}.Mat_B(\phi).P_{B,B'}$$

Démonstration : Evident.□

Au vu de ce résultat, on comprend l'intérêt d'introduire la définition suivante :

Définition 84 *Deux matrices P et Q sont dites* **congruentes** *si il existe M inversible telle que $P = {}^t MQM$.*

Proposition 85 • *La congruence est une relation d'équivalence*
• *Deux matrices sont congruentes si et seulement si elles représentent la même forme bilinéaire dans deux bases différentes*
• *Deux matrices congruentes ont même rang*

 Deux matrices congruentes n'ont pas nécéssairement même déterminant.

2.4.2 Formes quadratiques

⊡ **Le cas général**

Définition 86 *On appelle* **forme quadratique associée à la forme bilinéaire** *ϕ l'application $x \mapsto \phi(x,x)$.*
Une application de E^2 dans $\mathbb{K}$ est une **forme quadratique** *sur E si et seulement si c'est la forme quadratique associée à une certaine forme bilinéaire.*

Proposition 87 *Soit q une forme quadratique, alors*

$$q(x+y)+q(x-y)=2(q(x)+q(y))$$

(voir figure 2.1)

Démonstration : Il suffit de développer la formule en considérant ϕ à laquelle est associé q.□

Proposition 88 *L'application qui à une forme bilinéaire associe la forme quadratique qui lui est associée est une application linéaire de $\mathcal{L}_2(E)$ dans l'ensemble des fonctions de E dans $\mathbb{K}$. Son noyau est l'ensemble des applications bilinéaires antisymétriques, et elle induit un isomorphisme de l'ensemble des applications bilinéaires symétriques sur E sur l'ensemble des formes quadratiques.*

Démonstration : • Le fait que cette application soit linéaire est évident.
• Montrons que si sa forme quadratique associée est nulle, alors ϕ est antisymétrique. Pour tout x et tout y $\phi(x+y,x+y)=\phi(x,x)+\phi(y,y)+\phi(x,y)+\phi(y,x)$; donc si pour tout z $\phi(z,z)=0$, alors $\phi(x,y)+\phi(y,x)=0$. D'où le résultat.□

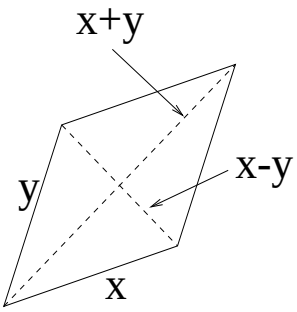

FIG. 2.1 – Formule du parallélogramme. La somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés.

Définition 89 *Etant donnée q une forme quadratique q sur E, l'unique forme bilinéaire symétrique ϕ telle que pour tout x $q(x) = \phi(x, x)$i est appelée* **forme polaire de** q.

Proposition 90 *Les formules suivantes permettent de déterminer la forme polaire ϕ associée à une forme quadratique q :*
• $\phi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y))$
• $\phi(x, y) = \frac{1}{4}(q(x + y) - q(x - y))$

Définition 91 (Orthogonalité) *Etant données q une forme quadratique et ϕ sa forme polaire :*
• *x et y appartenant à E sont* **orthogonaux** *si et seulement si $\phi(x, y) = 0$*
• *deux parties X et Y de E sont dites* **orthogonales** *si et seulement si tout x dans X et tout y dans Y sont orthogonaux.*
• *On appelle* **orthogonal** *d'une partie X de E et on note $X^\perp$ l'ensemble des éléments orthogonaux à tous les éléments de X.*
• *On appelle* **noyau** *de q l'orthogonal de E (à ne pas confondre avec le cône isotrope de q) ; on le note $N(q)$.*
• *On appelle* **cône isotrope de** *q et on note $C(q)$ l'ensemble des x tels que $q(x) = 0$ (à ne pas confondre avec le noyau de q). Un élément du cône isotrope est appelé* **vecteur isotrope**.
• *Un sous-espace vectoriel de E est dit* **isotrope** *si la restriction de q à ce sous-espace vectoriel est dégénérée.*
• *Un sous-espace vectoriel de E est dit* **totalement isotrope** *si la restriction de q à ce sous-espace vectoriel est nulle.*
• *Une forme quadratique est dite* **dégénérée** *si son noyau n'est pas réduit à $\{0\}$.*
• *Une forme quadratique est dite* **définie** *si son cône isotrope est réduit à $\{0\}$.*
• *Une forme quadratique q sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est dite* **positive** *(resp.* **négative***) lorsque pour tout x on a $q(x, x) \geq 0$ (resp. $q(x, x) \leq 0$).*

Proposition 92 • *Un sous-espace vectoriel est isotrope si et seulement si il a une intersection non réduite à $\{0\}$ avec son orthogonal.*
• *Un sous-espace vectoriel est totalement isotrope si et seulement si il est inclus dans son orthogonal.*
• *L'orthogonal d'une partie de E est l'orthogonal du sous-espace vectoriel engendré par cette partie.*
• *Avec X et Y des parties de E, $X \subset Vect(Y) \rightarrow Y^\perp \subset X^\perp$*

espace vectoriel (il contient le sous-espace vectoriel noyau de q).

⚠ La restriction d'une forme quadratique non-dégénérée à un sous-espace vectoriel n'est pas nécéssairement non-dégénérée.

Proposition 94 *Le cône isotrope est un cône, c'est à dire que x isotrope $\rightarrow$ $\lambda.x$ isotrope pour tout λ dans $\mathbb{K}$.*

Définition 95 (Familles orthogonales et orthonormales) *Une famille (x_i) de vecteurs de E est dite* **orthogonale** *si $i \neq j$ implique $\phi(x_i, x_j) = 0$.*
Une famille (x_i) de vecteurs de E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est dite **réduite** *si elle est orthogonale et si $\phi(x_i, x_i) = \chi_{1,rg(q)}(i)$.*
Une famille (x_i) de vecteurs de E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel est dite **réduite** *si elle est orthogonale et si $\phi(x_i, x_i) = \chi_{1,p}(i) - \chi_{p+1,rg(q)}(i)$ pour un certain p dans $[0, rg(q)]$.*
Une famille (x_i) de vecteurs de E est dite **orthonormale** *si $\phi(x_i, x_j) = \delta_{i,j}$.*
Une matrice réelle ou complexe de type (n, n) est dite **orthogonale** *si la famille de ses vecteurs colonnes forme une famille orthonormale de $\mathbb{K}^n$.*

Proposition 96 • *Une famille orthogonale sans vecteur isotrope est libre. En particulier si q est définie une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.*
• *Une famille orthonormale est libre.*

Démonstration : $\phi(\sum_i \lambda_i.x_i, x_i) = \lambda_i.\phi(x_i, x_i)$, etc... □

⊡ Le cas de la dimension finie - expression matricielle

On suppose que $B = (e_1, ..., e_n)$ est une base de E.

Définition 97 *On appelle* **matrice d'une forme quadratique dans une base** *B la matrice de sa forme polaire dans la base B.*
On note $Mat_B(q)$ la matrice de la forme quadratique q dans la base B.
On appelle **rang** *de q la rang de sa matrice dans une base quelconque (le rang est indépendant de la base).*
On appelle **discriminant** *d'une forme quadratique q dans une base B le déterminant de la matrice de q dans la base B.*

⚠ Le discriminant dépend de la base.

Le troisième point appelle une preuve, que voici ci-dessous :

Proposition 98 $Mat_{B'}(q) = {}^t P_{B,B'}.Mat_B(q).P_{B,B'}$

Démonstration : Il suffit d'aller voir la démonstration équivalente pour les formes bilinéaires, en 2.4.1.□

Deux matrices congruentes ayant même rang, la définition ci-dessus est donc cohérente.

Proposition 99 *Etant donnés x dans E et X le vecteur défini par $X_i = e_i^*(x)$, on a $q(x) = {}^t X.Mat_B(q).X$.*

Démonstration : Il suffit de considérer la forme polaire de q et de consulter la partie 2.4.1.□

Proposition 100 *Un polynôme de degré ≤ 2 en $x_1, ..., x_n$ est une forme quadratique sur $\mathbb{K}^n$.*
Pour obtenir sa forme polaire, on remplace chaque $x_i.x_i$ par $x_i.y_i$, et chaque $x_i.x_j$ par $\frac{1}{2}(x_i.y_j + x_j.y_i)$; le polynôme en (x_i) et (y_i) est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{K}^n$, et est la forme polaire du polynôme.

Proposition 101 *Le noyau d'une forme quadratique en dimension finie est le noyau de l'endomorphisme ayant même matrice (dans la même base).*
La dimension de E est la somme du rang de q et de la dimension du noyau de q.

Démonstration : Evident, il n'y a qu'à l'écrire.□

Proposition 102 • *Une base est orthogonale si et seulement si la matrice de q dans cette base est diagonale.*
• *Une base est orthonormale si et seulement si la matrice de q dans cette base est l'identité.*

Démonstration : Evident !□

Le théorème suivant est très important :

Théorème 103 *Pour toute forme quadratique sur E de dimension finie, il existe une base de E orthogonale pour q.*

Démonstration : On montre ce résultat par récurrence :
• Le cas $n = 1$ est trivial.
• Si q est nulle, le résultat est clair ; sinon on choisit e_1 non isotrope, et on note H l'orthogonal de e_1. Tout vecteur x s'écrit

$$x = \underbrace{\in \mathbb{K}.e_1}\ \frac{\phi(e_1,x)}{q(e_1)}.e_1 + \underbrace{\in e_1^{\perp}}\ x - \frac{\phi(e_1,x)}{q(e_1)}.e_1$$

donc $E = \mathbb{K}.e_1 \oplus H$. Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence sur H.□

Corollaire 104 *Pour tout forme quadratique q sur E $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, il existe $p \in [1,n]$ et $\lambda_1, ..., \lambda_p$ dans $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ et f_1,...,f_p dans E^* tel que*
• les f_i forment une famille libre
• $q(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i.f_i(x)^2$
En outre, p est unique et est égal au rang de q.

Démonstration : Il s'agit simplement de la traduction du théorème précédent.□

On en déduit les deux corollaires suivants, l'un dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, l'autre dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

Corollaire 105 (Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) *Pour tout forme quadratique q sur E $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, il existe $p \in [1,n]$ et f_1,...,f_p dans E^* tel que*
• les f_i forment une famille libre
• $q(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i(x)^2$
En outre, p est unique et est égal au rang de q.

Démonstration : Il suffit de voir dans le corollaire précédent que l'on peut multiplier f_i par une racine carrée de $\frac{1}{\lambda_i}$.□

Corollaire 106 (Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) *Pour tout forme quadratique q sur E $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, il existe $r \in [1,n]$ et p dans $[1,r]$ et f_1,...,f_p dans E^* tel que*
• les f_i forment une famille libre
• $q(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i(x)^2 - \sum_{i=p+1}^{r} f_i(x)^2$
En outre, r est unique et est égal au rang de q, et p est unique.

Démonstration : Il suffit de voir que l'on peut multiplier f_i par une racine carrée de $\frac{1}{|\lambda_i|}$; il ne reste alors plus qu'à montrer l'unicité de p. Pour cela, on considère s le p maximal possible, et u le p minimal possible ; on note $t = q - u$.
Alors • q est définie positive sur un espace de dimension s
• q est définie négative sur un espace de dimension t

On déduit facilement que :
• ces deux espaces sont en somme directe, donc $s + t \leq r$
• $p \leq s$
• $r - p \leq t$
Donc si $p < s$, $p+r-p < r$, et si $r-p < t$, $p+r-p < r$, donc nécéssairement, $p = s$. □

Encore un corollaire dans le cadre d'une forme quadratique définie positive :

Corollaire 107 (Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et q définie positive) *Pour tout forme quadratique q sur E $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, il existe f_1,...,f_n dans E^* tel que*
• *les f_i forment une famille libre*
• $q(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)^2$
On en déduit aussi l'existence d'une base orthonormale.

2.4.3 Formes quadratiques réelles

Pour toute la durée de cette section, on se place dans le cadre de E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel .

⊡ **Le cas général**

On rappelle la définition suivante :

Définition 108 *Une forme quadratique q sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est dite* **positive** *(resp.* **négative***) lorsque pour tout x on a $q(x, x) \geq 0$ (resp. $q(x, x) \leq 0$).*

Théorème 109 (Inégalité de Schwartz) • *Soit q une forme quadratique positive sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, et soit ϕ sa forme polaire. Alors pour tout x et tout y dans E*

$$\phi(x, y)^2 \leq q(x).q(y)$$

• *Soit q une forme quadratique définie positive sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, et soit ϕ sa forme polaire. Alors pour tout x et tout y dans E*

$$\phi(x, y)^2 \leq q(x).q(y)$$

et

$$\phi(x, y)^2 = q(x).q(y) \Longrightarrow (x, y) \text{ est une famille liée.}$$

Démonstration : • Il suffit de considérer le discriminant du polynôme en t $q(x.t + y)$ (ce polynôme est toujours positif puisque la forme quadratique est positive).
• L'égalité implique que $q(y - \frac{\phi(x,y)}{q(x)}.x) = 0$.□

On remarque que l'inégalité de Schwartz implique qu'une forme bilinéaire symétrique positive est continue.

Corollaire 110 (Noyau et cône isotrope d'une forme quadratique positive)
• *Si q est positive alors $N(q) = C(q)$.*
• *Si q est positive alors q est définie si et seulement si elle est non-dégénérée.*

Proposition 111 *Une forme quadratique q sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel qui est définie est nécéssairement soit positive soit négative.*

Démonstration : On suppose qu'il existe x et y avec $q(x) > 0$ et $q(y) < 0$. Alors l'application qui à t dans $[0, 1]$ associe $q(t.x + (1-t).y)$ est continue (il suffit de développer pour le voir), donc par le théorème des valeurs intermédiaires **??** elle s'annule en un certain t_0. Nécéssairement $t.x + (1-t)y = 0$ (puisque q est définie), donc x et y sont linéairement dépendants ($t \neq 0$ et $t \neq 1$). Donc $q(x)$ et $q(y)$ sont de même signe, d'où contradiction.□

Une autre formulation des inégalités de Schwartz est donnée dans le corollaire ci-dessous :

Corollaire 112 (Inégalités de Minkowski) • *Soit q une forme quadratique positive sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Alors pour tout x et tout y dans E*

$$\sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$$

• *Soit q une forme quadratique définie positive sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, alors pour tout x et tout y dans E*

$$\sqrt{q(x+y)} = \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)} \Longrightarrow (x, y) \text{ est une famille positivement liée.}$$

Démonstration : • Par l'inégalité de Schwartz

$$\phi(x, y)^2 \leq q(x).q(y)$$

et donc

$$\rightarrow \frac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2} \leq \sqrt{q(x).q(y)}$$

$$\rightarrow q(x+y) \leq q(x) + q(y) + 2.\sqrt{q(x).q(y)}$$

$$\rightarrow \sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$$

• Même principe.□

Proposition 113 • *Une forme quadratique q est positive si et seulement si $-q$ est négative*
• *Une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel est convexe si et seulement si elle est positive*
• *Une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel est concave si et seulement si elle est négative*

⊡ Le cas de la dimension finie - expression matricielle

On suppose maintenant que l'on travaille sur E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. q est une forme quadratique.

Proposition 114 (Propriété fondamentale des formes quadratiques définies positives) *Si E est une forme quadratique définie positive sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie, alors il existe une base de E orthonormale pour q.*

Démonstration : Il suffit de considérer le corollaire 107.□

Proposition 115 (Quelques propriétés sur l'orthogonalité sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie)
• *Pour F sous-espace vectoriel de E, on a $dim\ F + dim\ F^{\perp} \geq n$*
• *Soit F sous-espace vectoriel de E, avec $q_{|F}$ définie, alors $E = F \oplus F^{\perp}$.*

Démonstration : • Soit $(f_i)_{i\in[1,f]}$ une base de F, complétée en $(f_i)_{i\in E}$ une base de E.
Soit p l'application de E dans E définie par $p(x) = \sum_{i\in[1,f]} \phi(x, f_i).f_i$. Cette application est linéaire ; on peut donc écrire

$$dim\ E = rg(p) + dim\ Ker\ p$$

Or

$$rg(p) \leq dim\ F$$

et

$$dim\ Ker\ p = dim\ F^{\perp}$$

donc

$$dim\ E \leq dim\ F + dim\ Ker\ p$$

• $F \cap F^{\perp} = \emptyset$ car q est définie sur F. L'inégalité précédente donne $dim\ F + dim\ F^{\perp} \geq n$, d'où le résultat.□

Définition 116 (Signature d'une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie) *On appelle* **signature d'une forme quadratique** q *le couple* (s,t) *avec* s *la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de* E *sur lequel* q *est définie positive et* t *la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de* E *sur lequel* q *est définie négative.*

Le théorème suivant, très important, permet de cerner l'intérêt de la notion.

Théorème 117 (Théorème d'inertie de Sylvester) *Pour toute base* q*-orthogonale* e_i*, l'ensemble des* i *tels que* $q(e_i) > 0$ *a même cardinal, l'ensemble des* i *tels que* $q(e_i) = 0$ *a même cardinal, l'ensemble des* i *tels que* $q(e_i) > 0$ *a même cardinal.*
Le sous-espace vectoriel engendré par l'ensemble des i *tels que* $q(e_i) > 0$ *est un sous-espace vectoriel* F *de dimension maximale tel que* $q_{|F}$ *soit définie positive.*
Le sous-espace vectoriel engendré par l'ensemble des i *tels que* $q(e_i) < 0$ *est un sous-espace vectoriel* F *de dimension maximale tel que* $q_{|F}$ *soit définie négative.*
L'ensemble des i *tels que* $q(e_i) = 0$ *est égal à la dimension de* E *moins le rang de* q*.*

Démonstration : Il suffit de consulter la preuve du corollaire 106.□

Corollaire 118 • *Toute matrice symétrique est congruente à une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont* $(1,...,1,-1,...-1,0,...0)$.
• *Deux formes quadratiques ont la même signature si et seulement si on passe de l'un à l'autre en composant par un automorphisme.*

Proposition 119 *Une matrice* M *de type* (n,n) *est antisymétrique si et seulement si pour tout vecteur* X *de* $\mathbb{K}^n$ *on a* ${}^tX.M.X = 0$*.*

Démonstration : La forme polaire de la forme quadratique associée à M est $(X,Y) \mapsto {}^tX.(\frac{1}{2}(M + {}^tM)).Y$. Elle est nulle si et seulement si M est antisymétrique (voir proposition 88).□

⊡ Le cas d'un espace euclidien

Pour plus d'informations sur les espaces euclidiens on consultera la partie 3.5. Un espace euclidien étant réel et de dimension finie, ce qui vient d'être dit est encore valable.

On va noter $Q(E)$ l'espace des formes quadratiques. Les notations usuelles seront utilisées :

- $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E
- $q \in Q(E)$
- M la matrice (symétrique) associée à q pour la base des e_i
- ϕ la forme polaire de q (symétrique, de matrice M dans la base des e_i)
- X désigne le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base des e_i
- Y désigne le vecteur colonne des coordonnées de y dans la base des e_i

◇ **Formulaire**

$$q(x_1.e_1, x_2.e_2, ..., x_n.e_n) = \sum_{(i,j)\in[1,n]^2} M_{i,j}x_i.x_j$$

$$\phi((x_1.e_1, x_2.e_2, ..., x_n.e_n), (y_1.e_1, y_2.e_2, ..., y_n.e_n)) = \sum_{(i,j)\in[1,n]^2} M_{i,j}x_i.y_j$$

$$M_{i,j} = \phi(e_i, e_j)$$

$$q(e_i) = M_{i,i}$$

$$q(x) = {}^t X.M.X$$

$$\phi(x, y) = {}^t X.M.X$$

et avec $(f_1, ..., f_n)$ une autre base,

$$Mat_{(f_i)}(\phi) = Mat_{(f_i)}(q) = {}^t P_{(e_i),(f_i)}.M.P_{(e_i),(f_i)}$$

◇ **Résultats divers**

Théorème 120 *L'application F de $L(E)$ dans l'ensemble des applications de E dans $\mathbb{R}$ définie par $F(f) = (y \mapsto < f(y)|y >$ induit un isomorphisme de $S(E)$ (ensemble des endomorphismes symétriques de E) sur $Q(E)$ (ensemble des formes quadratiques sur E).*

Démonstration :

• $F(f)$ appartient à $Q(E)$ pour tout f dans $L(E)$ se voit en considérant la forme bilinéaire $\phi = (x, y) \mapsto \frac{1}{2}(< f(x)|y > + < x|f(y) >)$.

• $< f(x)|x >= 0$ pour tout $x \iff f$ antisymétrique (si vous n'en êtes pas convaincu, revoyez la partie 3.5.2).

• Avec n la dimension de E, on sait alors que l'image de F est de dimension $n^2 - \frac{1}{2}n.(n-1) = \frac{1}{2}n.(n+1) = dim\, Q(E)$, donc F a bien pour image $Q(E)$; $S(E)$ étant un supplémentaire du noyau de F, F induit bien un isomorphisme de $S(E)$ sur $Q(E)$.□

Corollaire 121 • *Toute forme quadratique q s'écrit $x \mapsto < f(x)|x >$ pour un certain endomorphisme symétrique f (on peut d'ailleurs aussi écrire $x \mapsto < x|f(x) >$, puisque f est symétrique).*
• *Dans la même base, q, ϕ et f ont même matrice.*

Définition 122 *f (défini comme précédemment) est appelé* **endomorphisme symétrique associé à la forme quadratique** q.

Ceci nous permet de donner quelques résultats, conséquences immédiates de résultats connus sur les endomorphismes symétriques :

Théorème 123 • *Soit q une forme quadratique sur E euclidien ; alors il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de l'endomorphisme associée à q est diagonale ; c'est à dire que cette base est orthogonale pour q aussi.*
• *Si on a deux formes quadratiques sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie dont l'une (au moins) est définie, alors il existe une base orthogonale pour les deux formes quadratiques (il suffit de considérer l'espace euclidien engendré par la forme définie (ou sa négation si elle est négative) pour conclure).*
• *Une forme quadratique sur E euclidien est positive si et seulement si toutes les valeurs propres de l'endomorphisme symétrique associé sont positives*
• *Une forme quadratique sur E euclidien est définie si et seulement si toutes les valeurs propres de l'endomorphisme symétrique associé sont non nulles et de même signe*
• *Une forme quadratique sur E euclidien est négative si et seulement si toutes les valeurs propres de l'endomorphisme symétrique associé sont négatives*

2.4.4 Formes quadratiques complexes

⊡ **Le cas général**

Le cadre le plus général est simplement celui d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel .

Définition 124 *On appelle* **forme quadratique hermitienne** *sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E une application q de E dans $\mathbb{C}$ telle qu'il existe une forme sesquilinéaire hermitienne ϕ telle que pour tout x on ait $q(x) = \phi(x, x)$. Cette forme sesquilinéaire hermitienne est unique (à vérifier plus bas) ; on l'appelle* **forme polaire** *de q.*

Proposition 125 *Soit q une forme quadratique hermitienne. Alors :*

$$\forall x q(x) \in \mathbb{R}$$

en effet $\phi(x, x) = \overline{\phi(x, x)}$ car ϕ est hermitienne

$$\forall (x, y) \in E^2 \ \phi(x, y) = \frac{1}{4}(\sum_{j=1}^{4} \overline{i^j}.q(x + i^j.y))$$

cela se montre simplement en développant chacun des 4 termes de droite
L'ensemble des formes quadratiques hermitiennes sur E noté $QH(E)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel .
⚠ *Ce n'est pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel , comme on s'en convainc facilement en considérant une forme quadratique hermitienne non nulle multipliée par i...*

On note au passage que le deuxième résultat de cette proposition donne l'unicité recquise dans la définition de la forme polaire ci-dessus.

⊡ **Le cas de la dimension finie - expression matricielle**

Définition 126 *Etant donnée $(e_1, ..., e_n)$ une base de E espace hermitien et q une forme quadratique hermitienne sur E de forme polaire ϕ, on définit la* **matrice M associée à** *q ou* **matrice associée à** *ϕ par $M_{i,j} = \phi(e_i, e_j)$. On note $M = Mat_{(e_i)}(\phi)$ ou $M = Mat_{(e_i)}(q)$.*

Proposition 127 *La matrice M associée à une forme quadratique hermitienne est hermitienne c'est-à-dire que $M = {}^t\overline{M}$.*
Avec X le vecteur colonne des coordonnées de x dans une base donnée, Y le vecteur colonne des coordonnées de y dans la même base, M la matrice associée à q ou ϕ dans la même base, on a

$$\phi(x,y) = {}^t\overline{X}.M.Y$$

$$q(x) = {}^t\overline{X}.M.X = \sum_{i=1}^{n} M_{i,i}.|X_i|^2 + 2.Re(\sum_{i<j} M_{i,j}\overline{X}_i.X_j)$$

Si $(e_i)_{i\in[1,n]}$ et $(f_i)_{i\in[1,n]}$ sont deux bases de E, alors $Mat_{(e_i)}(q) = {}^t\overline{P_{(e_i),(f_i)}}.Mat_{(f_i)}(q).P_{(e_i),(f_i)}$.

⊡ **Formes quadratiques sur un espace hermitien**

Définition 128 *On note $QH(E)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des formes quadratiques hermitienne sur E espace hermitien.*
On note $H(E)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des endomorphismes hermitiens de E, espace hermitien.
Etant donné $f \in H(E)$, la forme quadratique $x \mapsto < f(x)|x >$ est appelée **forme quadratique hermitienne associée à l'endomorphisme hermitien** *f ; réciproquement f est appelée* **endomorphisme hermitien associée à cette forme quadratique** *(voir unicité ci-dessous).*

Théorème 129 *L'application F de $H(E)$ dans $QH(E)$ défini par $F(f) = (x \mapsto < f(x)|x >)$ est un isomorphisme.*

Démonstration : • Le fait que pour tout f dans $H(E)$ $F(f)$ soit une forme quadratique est clair (considérer la forme sesquilinéaire $(x,y) \mapsto < f(x)|y >$).
• Le fait que f est un morphisme est facile à prouver.
• La surjectivité :
Il suffit, étant donné une forme quadratique, de considérer sa matrice dans une base orthonormale quelconque, et l'endomorphisme associé à la même matrice dans la même base ; l'image de cet endomorphisme par f.
• L'injectivité :
Supposons $F(f) = 0$. L'application $(x,y) \mapsto < f(x)|y >$ est la forme polaire de $F(f)$ (elle est bien sesquilinéaire et hermitienne) ; donc cette forme sesquilinéaire est nulle par unicité de la forme polaire. Donc $< f(x)|y >$ est nul pour tout x et tout y, d'où le

résultat en spécialisant par $y = f(x)$.□

Théorème 130 *Pour toute forme quadratique hermitienne il existe une base orthonormale (pour le produit scalaire hermitien) qui est orthogonale pour cette forme quadratique.*

Démonstration : Il suffit de considérer la proposition 189 appliqué à l'endomorphisme associé à une forme quadratique.□

Quelques liens entre une forme quadratique q et l'endomorphisme hermitien associé f :

• q est définie si et seulement si toutes les valeurs propres de f sont de même signe et non nulles

• q est positive si et seulement si toutes les valeurs propres de f sont positives

• q est négative si et seulement si toutes les valeurs propres de f sont négatives

2.5 Zoologie des déterminants

2.5.1 Déterminant d'ordre 2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - b.c$$

2.5.2 Déterminant d'ordre 3

$$\begin{vmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} \\ M_{3,1} & M_{3,2} & M_{3,3} \end{vmatrix}$$

$$= M_{1,1}.M_{2,2}.M_{3,3} + M_{1,2}.M_{2,3}.M_{3,1} + M_{2,1}.M_{3,2}.M_{2,3}$$

$$-M_{3,1}.M_{2,2}.M_{1,3} - M_{2,1}.M_{1,2}.M_{3,3} - M_{3,2}.M_{2,3}.M_{1,1}$$

Une façon usuelle de retenir ce résultat pas très élégant vu comme ça est le schéma 2.2.

On suit les flèches marquées d'un $+$ pour retrouver les produits à compter positivement, et les flèches marquées d'un $-$ pour retruver les produits à compter négativement.

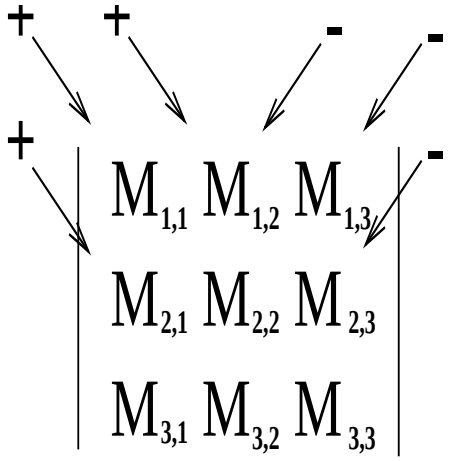

FIG. 2.2 – La règle de Sarrus

2.5.3 Déterminant de Vandermonde

Définition 131 *On appelle* **déterminant de Vandermonde associé à un** n**-uple** $(x_1, ..., x_n)$ *le déterminant*

$$\begin{vmatrix} x_1^0 & x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^n \\ x_2^0 & x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^n \\ x_3^0 & x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 & \dots & x_3^n \\ x_4^0 & x_4^1 & x_4^2 & x_4^3 & \dots & x_4^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^0 & x_n^1 & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

Proposition 132 (Déterminant de Vandermonde) *Le déterminant de Vandermonde associé à* $(x_1, ..., x_n)$ *est*

$$\Pi_{i<j} x_j - x_i$$

Démonstration :

On note W_n le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1^0 & x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^n \\ x_2^0 & x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^n \\ x_3^0 & x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 & \dots & x_3^n \\ x_4^0 & x_4^1 & x_4^2 & x_4^3 & \dots & x_4^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^0 & x_n^1 & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

On note P_n le polynôme $\Pi_{i\in[1,n-1]}(X - x_i)$. On a

$$P = X^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} p_k.X^{k-1}$$

On ajoute alors à la dernière colonne la somme des $p_k.c_k$ pour $k \in [1, n-1]$ avec c_k la colonne k. Sur la dernière colonne, on a maintenant seulement des 0, sauf pour la dernière ligne où l'on a $P(x_n)$.

Par récurrence, on en déduit le résultat annoncé.□

2.5.4 Déterminant d'une matrice de permutation

Définition 133 (Matrice d'une permutation) *On appelle* **matrice de la permutation** $\sigma \in \sigma_n$ *la matrice* M *de type* (n, n) *définie par* $M_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$.

Proposition 134 *Le déterminant de la matrice de la permutation* σ *est égal à la signature de la permutation* $\epsilon(\sigma)$.

Démonstration : Il suffit de revenir à la définition du déterminant d'une famille de vecteurs dans une base, et de voir qu'il n'y a qu'une permutation qui n'annule pas le produit correspondant dans la formule.□

2.5.5 Déterminant circulant droit

Définition 135 *On appelle* **matrice circulante associé au** n**-uple** $(x_1, ..., x_n)$ *la matrice* M *définie par* $M_{i,j} = x_{j-i}$ *(modulo* n*)* *, c'est à dire*

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_n & x_1 & x_2 & \ddots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_n & x_1 & \ddots & x_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_1 \end{pmatrix}$$

On trouvera la définition d'une matrice circulante droite en 4.7.

Proposition 136 *$C_n = \Pi_{i=1..n} P(y_i)$ avec $P(X) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i.X^{i-1}$ et $y_i = e^{\frac{2.i.\Pi}{n}}$.*

Démonstration : On note Y_i le vecteur $(y_i^0, ..., y_i^{n-1})$.
On constate que $M.Y_i = P(y_i).Y_i$.
On note Y la matrice dont les vecteurs colonnes sont $Y_0, ..., Y_{n-1}$.
On a alors $M.Y = M.diag(P(y_0), ..., P(y_{n-1}))$.
Donc comme le déterminant de M est non nul (voir 2.5.3), le déterminant de Y est $\Pi_{i=1..n} P(y_i)$.□

Quand même, il fallait y penser, à multiplier par la transposée de la matrice de Vandermonde associée aux racines n-ièmes de l'unité...

On définit de même les matrices circulantes gauche, dont on calcule le déterminant en utilisant une permutation bien choisie sur les lignes...

2.5.6 Déterminant de $M_{i,j} = inf\{i, j\}$

Le déterminant est le suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix}$$

Puisqu'on peut à volonté sans changer le déterminant ajouter à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes, on peut en particulier soustraire à une colonne la colonne précédente ; on obtient alors le déterminant plus facile :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Ce déterminant est donc égal à 1.

2.6 Zoologie de l'algèbre bilinéaire

2.6.1 Procédé d'orthogonalisation de Gauss

Théorème 137 (Orthogonalisation de Gauss) *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et q une forme quadratique sur E. Alors, avec r le rang de q, il existe r formes linéaires indépendantes sur E, f_1,...,f_r tels que $q = \sum_{i=1}^{r} f_i^2$.*

Démonstration : Il s'agit simplement d'opérations sur les lignes et les colonnes ; voir la méthode de Gauss, 245.□

Chapitre 3

Espaces préhilbertiens et espaces de Hilbert

3.1 Espaces préhilbertiens réels

Il est recommandé de lire au préalable la partie 2.4 et la partie **??**.

Définition 138 *Etant donné E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel , on appelle* **produit scalaire euclidien sur** *E une application $< .|. >$ de E^2 dans $\mathbb{R}$ telle que :*
• *$< .|. >$ est bilinéaire*
• *$< x|y >=< y|x >$ pour tout x et tout y*
• *$\forall x \neq 0 < x|x >> 0$ (i.e. la forme quadratique associée à ϕ est une forme bilinéaire définie positive)*

On appelle **espace préhilbertien réel** *un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire euclidien.*
Un sous-espace vectoriel F d'un espace préhilbertien réel E muni d'un produit scalaire euclidien, muni de la restriction du produit scalaire euclidien à F, est appelée **sous-espace préhilbertien** *de E (c'est un espace préhilbertien).*

Etant donné un produit scalaire euclidien $< .|. >$, on définit une **norme euclidienne** *; il s'agit de l'application $x \mapsto \|x\| = \sqrt{< x|x >}$. On verra plus loin qu'il s'agit d'une norme (facile au vu des résultats de la partie 2.4).*

⚠ On n'a à aucun moment imposé que la dimension soit finie.

Un produit scalaire euclidien sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel est donc une forme bilinéaire symétrique associée à une forme quadratique définie positive.

Exemples :

• Le **produit scalaire euclidien canonique** sur $\mathbb{R}^n$ est défini par

$$(x|y) = \sum_{i\in[1,n]} x_i.y_i.$$

• Le **produit scalaire euclidien canonique** sur le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites sommables (i.e. des $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ converge) est défini par

$$< (u_n)_{n\in\mathbb{N}}|(v_n)_{n\in\mathbb{N}} >= \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n.v_n.$$

Il est important de rappeler le théorème 109 et le corollaire 112. Ils stipulent que :
• $< x|y >^2 \leq < x|x > . < y|y >$ (inégalité de Schwartz)
• $| < x|y > | \leq \|x\|.\|y\|$ (inégalité de Schwartz, en passant à la racine)
• $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité de Minkowski = inégalité triangulaire)
• Le produit scalaire est continu (conséquence de Schwartz)

 La notation $< x|y >$ peut être remplacée par $(x|y)$, $< x, y >$, (x, y), ou même $x.y$.

3.2 Espaces préhilbertiens complexes

Définition 139 *Une application d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel F est dite* **semi-linéaire** *si*
• $\forall (x,y) \in E^2\ f(x+y) = f(x) + f(y)$
• $\forall (x,\lambda) \in E \times \mathbb{C}\ f(\lambda.x) = \overline{\lambda} f(x)$
Une application semi-linéaire est un **semi-isomorphisme** *si et seulement si elle est semi-linéaire et bijective.*
Une **forme semi-linéaire** *est une application semi-linéaire d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel dans $\mathbb{C}$.*
Etant donnés E et F des $\mathbb{C}$-espace vectoriel une application ϕ de $E \times F$ est dite **forme sesquilinéaire** *sur $E \times F$ si*
• $\forall x$ *l'application* $y \mapsto \phi(x,y)$ *est une forme linéaire sur F*
• $\forall y$ *l'application* $x \mapsto \phi(x,y)$ *est une forme semi-linéaire sur E*
Une forme sesquilinéaire sur $E \times E$ est dite **hermitienne** *lorsque en outre $\forall (x,y) \in E^2\ \phi(x,y) = \overline{\phi(y,x)}$.*
Une forme sesquilinéaire hermitienne ϕ sur E^2 est dite **produit scalaire hermitien sur** *E si $\forall x \in E \setminus \{0\}\ \phi(x,x) \in \mathbb{R}_*^+$. On note généralement alors $< x|y >= \phi(x,y)$*
Etant donné un produit scalaire hermitien $< .|. >$, on définit une **norme hermitienne** *; il s'agit de l'application $x \mapsto \|x\| = \sqrt{< x|x >}$. On verra plus loin qu'il s'agit d'une norme.*
On appelle **espace préhilbertien complexe** *un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire hermitien. Un sous-espace vectoriel F d'un espace préhilbertien complexe E muni d'un produit scalaire hermitien, muni de la restriction du produit scalaire hermitien à F, est appelée* **sous-espace préhilbertien** *de E (c'est un espace préhilbertien).*

 On n'a à aucun moment imposé que la dimension soit finie.

 La notation $< x|y >$ peut être remplacée par $(x|y)$, $< x,y >$, (x,y), ou même $x.y$.

Remarquons que le fait que pour une forme sesquilinéaire hermitienne ϕ on ait $\forall x\ \phi(x,x) \in \mathbb{R}$ découle du fait que ϕ est hermitienne ; il suffit de vérifier que $\phi(x,x) > 0$.

 Une forme linéaire n'est pas nécéssairement une forme semi-linéaire

 Une forme semi-linéaire n'est pas nécéssairement une forme linéaire

Une forme sesquilinéaire est donc semi-linéaire par rapport à la première variable et linéaire par rapport à la seconde.

Exemples : Sur $\mathbb{C}^n$ le produit scalaire hermitien canonique est défini par $< x|y >= \sum_{i=1..n} \overline{x_i}.y_i$.

Les inégalités de Schwartz et de Minkowski montrées dans la partie2.4 sont valables ici aussi ; mais la démonstration, basée sur la bilinéarité et utilisant les formes quadratiques, n'est plus valable.

Lemme 140 (Egalité utile)

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2.Re(< x|y >)$$

avec $Re(u)$ la partie réelle de u.

Démonstration : Evidente, en utilisant $< x|y >= \overline{< y|x >}$.□

Théorème 141 (Inégalité de Cauchy-Schwartz) *Dans un espace préhilbertien complexe*

$$\forall (x,y) \in E^2 \mid < x|y > \mid \leq \|x\|.\|y\|$$

Il y a égalité si et seulement si la famille est liée.

Démonstration : Soit θ l'argument de $< x|y >$, alors pour tout t réel, au vu du lemme 140 :

$$\|t.e^{i\theta}.x + y\|^2 = t^2.\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2.t.| < y|x > |$$

On en déduit donc que le discriminant de $t \mapsto t^2.\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2.t.| < y|x > |$ est négatif ou nul, ce qui donne l'inégalité annoncée. Le cas d'égalité est le cas où le discriminant est nul.□

Corollaire 142 (Inégalité de Minkowski) *Dans un espace préhilbertien complexe*

$$\forall (x,y) \in E^2 \ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Il y a égalité si $y = \lambda.x$ ou $x = \lambda.y$ avec $\lambda > 0$.

Démonstration : Par le lemme 140, on a

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2.Re(< x|y >)$$

$$\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2.| < x|y > |$$

(par Cauchy-Schwartz ci-dessus)

$$= (\|x\| + \|y\|)^2$$

D'où le résultat. Le cas d'égalité se montre facilement... □

Proposition 143 *Dans le cas euclidien, retrouver le produit scalaire à partir de la norme était facile ; dans le cas hermitien c'est un peu plus compliqué :*

$$< x|y >= \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x+i.y\|^2 + i.\|x-i.y\|^2)$$

$$= \frac{1}{4}(\sum_{n=0}^{3} e^{-2.i.\pi.n/4}\|x + e^{2.i.\pi.n/4}.y\|)$$

⚠ La dernière ligne est un bon moyen mnémotechnique, mais il faut bien penser que l'on a un signe moins dans le coefficient de l'exponentiel en dehors de $\|.\|$ et un signe plus à l'intérieur.

3.3 Espaces préhilbertiens

On se place ici dans le cadre de E espace préhilbertien, réel ou complexe. On ne suppose absolument pas E de dimension finie.

Définition 144 *x et y appartenant à E sont dits* **orthogonaux** *si $< x|y >=< y|x >= 0$.*
Deux parties X et Y de E sont dites **orthogonales** *si x et y sont orthogonaux pour tout (x, y) dans $X \times Y$.*

On appelle **orthogonal** *d'une partie X et on note $X^\perp$ l'ensemble des y tels que $< x|y >= 0$ pour tout x dans X.*

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est dite **orthogonale** *si $i \neq j \rightarrow < x_i|x_j >= 0$.*

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est dite **orthonormale** *si $< x_i|x_j >= \delta_{i,j}$.*

Remarques :
• $< x|y >= 0 \iff < y|x >= 0$
• toute partie est orthogonale à son orthogonal
• Etant donné F un sous-espace vectoriel de E, la somme de F et de $F^\perp$ est toujours directe, *mais* non nécéssairement égale à E
• Pour toute partie X, $X^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de E (car c'est une intersection de fermés, par définition)

⚠ Ne pas confondre "être orthogonal à" et "être l'orthogonal de".

Proposition 145 *Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.*

Démonstration : Supposons donnée une combinaison linéaire nulle $\sum_i \lambda_i x_i$, et considérons le produit scalaire avec x_{i_0}. On en déduit immédiatement que λ_{i_0} est nul. D'où le résultat.□

Proposition 146 (Orthogonalité et espaces supplémentaires) • *Si F et G sont supplémentaires, alors F et G sont orthogonaux si et seulement si G est l'orthogonal de F.*
• *Si F et $F^\perp$ sont supplémentaires, alors $F^{\perp\perp} = F$.*

Démonstration : En exercice !□

On va maintenant considérer quelques résultats de géométrie :

Théorème 147 (Théorème de Pythagore) • *Si les x_i sont une famille finie orthogonale alors $\| \sum_i x_i \|^2 = \sum_i \|x\|^2$.*

Démonstration : Evident par récurrence.□

On note que dans le cas d'un espace préhilbertien réel, $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|$ équivaut à x et y orthogonaux.

⚠ Pas valable dans le cas complexe !

Proposition 148 (Quelques résultats de géométrie) • *Formule du triangle :*

$$\|y-z\|^2 = \|y-x\|^2 + \|z-x\| - 2.Re(< z-x|y-x >)$$

• *Formule de la médiane :*

$$\|y-z\|^2 + 4\|x - \frac{1}{2}(y+z)\|^2 = 2.\|x-y\|^2 + 2.\|x-z\|^2$$

• *Formule du triangle pour un espace préhilbertien réel :*

$$\|y-z\|^2 = \|y-x\|^2 + \|z-x\| - 2 < z-x|y-x >$$

• *Formule du parallélogramme, pour un espace préhilbertien réel :*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Démonstration : Facile, facile ; il suffit de développer. Illustration en figure 3.1.□

Théorème 149 • *Dans un espace préhilbertien E de dimension finie, tout sous-espace vectoriel F est supplémentaire à son orthogonal, ie $E = F \oplus F^\perp$. On a alors $dim\ E = dim\ F + dim\ F^\perp$.*
• *Tout espace préhilbertien de dimension finie admet une base orthonormale.*
• *Dans un espace préhilbertien de dimension finie, toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.*
• *Si F est un sous-espace vectoriel de E, avec E espace préhilbertien, et F est de dimension finie, alors on a $E = F \oplus F^\perp$.*

Démonstration : Pour le premier • , on considère l'application f qui à x dans E associe $(< u_1|x >, < u_2|x >, < u_3|x >, ..., < u_p|x >)$. Le noyau est $F^\perp$, le rang est $\leq$ à la dimension de F. Donc $dim\ F^\perp \geq dim\ E - dim\ F$, donc $E = F \oplus F^\perp$ (rappelons qu'il est toujours vrai que $F \cap F^\perp = \{0\}$). On a donc bien $dim\ F^\perp + dim\ F = dim\ E$.

Pour le second • , on raisonne par récurrence. Pour E préhilbertien de dimension ≤ 1, le résultat est évident. Il suffit ensuite de considérer un vecteur quelconque e_n de E de norme 1, et une base $(e_1, ..., e_{n-1})$ de $(\mathbb{K}.u)^\perp$. $(e_1, ..., e_n)$ convient.

Le troisième • est immédiat ; il suffit de considérer F engendré par la famille orthonormale $(e_1, ..., e_p)$ considérée, et une base $(e_{p+1}, ..., e_n)$ de $F^\perp$, réunie en $(e_1, ..., e_n)$, base orthonormale de E.

Le quatrième • est un peu plus long :
- on considère une base $(e_1, ..., e_p)$ orthonormale de F.
- on considère l'application f qui à x associe $\sum_{i=1^p} < e_i|x > e_i$.
- $\forall x \in E\ x = \underbrace{f(x)}_{\in F} + \underbrace{(x - f(x))}_{\in F^\perp}$

D'où le résultat.□

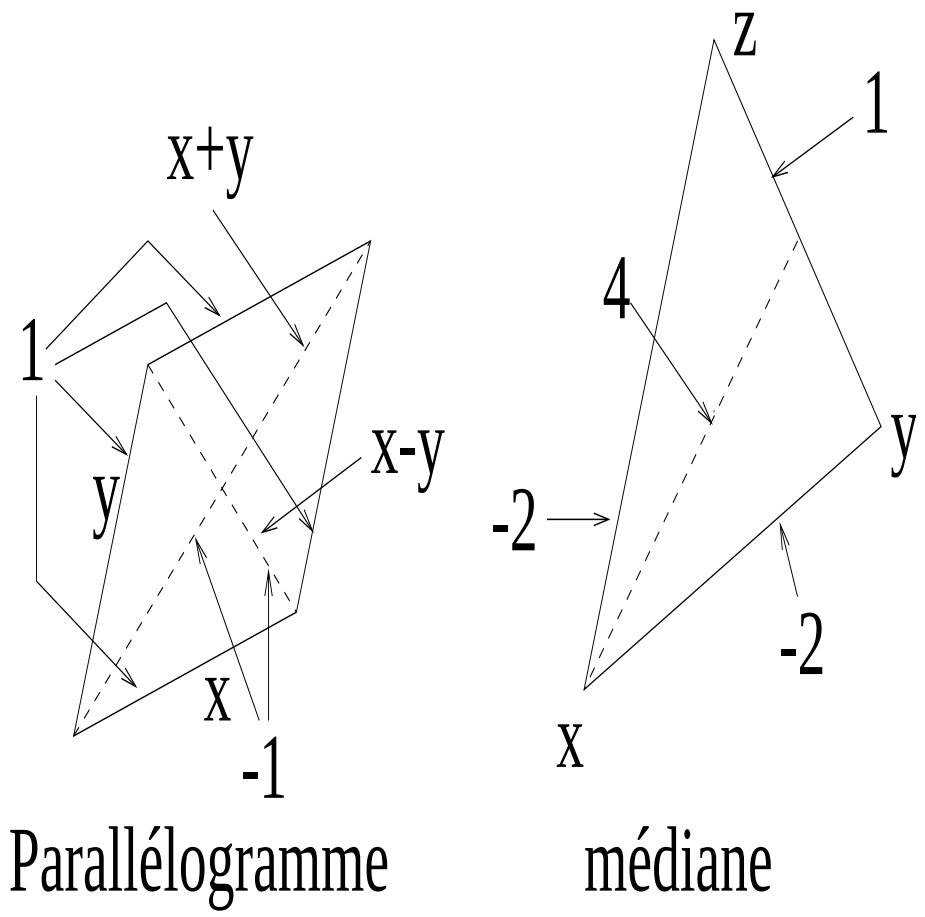

FIG. 3.1 – Illustrations de la formule de la médiane, du parallélogramme. Les coefficients attribués servent de moyen mnémotechnique ; en sommant les carrés des longueurs indiquées, pondérées par leur coefficient, on obtient zéro.

3.4 Espaces de Hilbert

Définition 150 *On appelle* **espace de Hilbert** *un espace préhilbertien complet.*

3.4.1 Projection dans un espace de Hilbert

Définition 151 *Soit H un espace de Hilbert, et E une partie convexe fermée non vide de H. Alors étant donné x appartenant à H on appelle* **projeté de** x **sur** E *un élément y de E tel que $\|x-y\|$ soit minimal, c'est-à-dire $y = argmin_{z\in E}\|z-x\|$.*
Un **isomorphisme d'espaces de Hilbert** *est un isomorphisme entre les espaces vectoriels sous-jacents qui préserve la norme et le produit scalaire.*

Théorème 152 *Le projeté de x sur E existe et est unique, et y dans E est le projeté de x sur E si et seulement si pour tout e dans E $Re(< e-y|x-y >) \leq 0$.*

Il est clair que dans le cas d'un espace de Hilbert réel, on pourrait simplement formuler $< e-y|x-y >< 0$.

Démonstration : • Existence d'un projeté de x sur E.
On se donne une suite y_n telle que $\|x-y_n\|$ tende vers la distance d entre x et E.
Par la formule de la médiane appliquée aux points y_n, y_m et x, on a alors

$$\|y_m-y_n\|^2 = 2.(\|x-y_n\|^2 + \|x-y_m\|^2) - 4.\|x-\frac{1}{2}(y_n+y_m)\|^2$$

par convexité de E on a alors $\frac{1}{2}(y_n+y_m) \in E$ et donc

$$\|x-\frac{1}{2}(y_n+y_m)\|^2 \geq d^2$$

et donc

$$\|y_m-y_n\|^2 \to 0$$

Donc la suite y_n est de Cauchy, donc par complétude de H elle converge. Sa limite y est dans E parce que E est fermé.
• Supposons que y est dans E et que pour tout e dans E $Re(< y-e|y-x >) \leq 0$.
Alors pour tout e dans E on a

$$\|x-e\|^2 = \|x-y\|^2 + \|e-y\|^2 - 2.Re(< e-y|x-y >)$$

On obtient d'un coup d'un seul que y est la borne inf, et que y est unique (car s'il y a égalité, $\|e-y\|=0$).
• Supposons maintenant que y soit un projeté de x sur E, et montrons que $Re(< e-y|x-y >) \leq 0$ pour tout e dans E.
On a :

$$\|x-e\|^2 = \|x-y\|^2 + \|e-y\|^2 - 2.Re(< e-y|x-y >)$$

et donc

$$Re(< e-y|x-y >) = \frac{1}{2}(\|x-e\|^2 - \|x-y\|^2 + \|e-y\|^2)$$

par définition de y, on a $\|x-e\|^2 - \|x-y\|^2 \leq 0$, et donc

$$Re(< e-y|x-y >) \leq \frac{1}{2}(\|e-y\|^2)$$

valable pour tout e.
On se donne maintenant z dans E, et on considère $e = t.z + (1-t).y$. L'inégalité précédente s'écrit alors

$$Re(< t.z - t.y|x-y >) \leq \frac{1}{2}(\|t.z - t.y\|^2)$$

et donc

$$Re(< z-y|x-y >) \leq \frac{t}{2}\|z-y\|$$

En faisant tendre t vers 0, on en déduit

$$Re(< z-y|x-y >) \leq 0$$

La preuve est ainsi complète.□

Corollaire 153 *Dans tout ensemble non vide fermé convexe il existe un unique élément de norme minimale.*

Proposition 154 • *Le projeté de x sur un sous-espace vectoriel fermé E (qui est évidemment convexe) est le point y tel que $y-x$ est orthogonal à $e-x$ pour tout e dans E.*
• *Soit $(x_i)_{i\in[1,n]}$ une famille orthonormale ; alors l'espace vectoriel engendré par les x_i est fermé (car il y en a un nombre fini, voir le corollaire* **??***), convexe. La projection sur ce sous-espace vectoriel de H est l'application qui à x associe $\sum_{i\in[1,n]} < x_i|x > .x_i$.*
On a alors $\|x\|^2 = \sum_i | < x_i|x > |^2 + \|x-y\|^2$ avec $y = \sum_{i\in[1,n]} < x_i|x > .x_i$.
• $\|x\|^2 \geq \sum_i < x_i|x >^2$ ***(inégalité de Bessel)**.*

Démonstration : Exercice facile, utilisant les résultats que l'on vient de voir dans le théorème précédent...□

Définition 155 *Soit E un sous-espace vectoriel fermé de H. On appelle* **projection orthogonale sur** *E l'application qui à x dans H associe son projeté sur E ; il s'agit d'un projecteur, et la symétrie associée à ce projecteur est appelée* **symétrie orthogonale par rapport à** *E (voir1.3.2).*

La projection orthogonale sur E est en fait la projection sur E suivant $E^\perp$.

3.4.2 Bases hilbertiennes

Définition 156 (Base hilbertienne) *On appelle base hilbertienne d'un espace de Hilbert H une famille $(x_i)_{i\in I}$ telle que :*
• *la famille des x_i est orthonormale*
• *pour tout x dans H $x = \sum_{i\in I} < x_i|x > x_i$*

La seconde condition est une somme éventuellement infinie, en fait il s'agit d'une famille sommable, i.e. pour tout ϵ il existe J fini inclus dans I, tel que pour tout K fini compris entre J et I la somme sur K des $< x_i|x > .x_i$ est à une distance $< \epsilon$ de x.

Théorème 157 • *Une famille orthonormale $(x_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne si et seulement si le sous-espace vectoriel engendré par les x_i est dense dans H.*
• *(**Relation de Parseval**) Une famille orthonormale $(x_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne si et seulement si $\sum_{i\in I} | < x_i|x > |^2 = \|x\|^2$.*

La relation du deuxième • est appelée **relation de Parseval**.

Démonstration : • Supposons le sous-espace vectoriel E engendré par les x_i dense dans H. Alors il existe y dans E tel que $\|x - y\| \leq \epsilon$, et $y = \sum \lambda_i x_i$. On en déduit que la famille est une base hilbertienne.
• Si la relation de Parseval est vérifiée, alors le sous-espace vectoriel engendré est dense dans H, comme on le voit en considérant une sous-famille de I suffisamment vaste.
• Si on suppose que la famille est une base hilbertienne, alors la relation de Parseval est vérifiée, au vu des résultats de la proposition 154.□

⚠ Attention ! Une base hilbertienne n'est pas nécéssairement une base au sens des espaces vectoriels !

Théorème 158 • *Une famille orthonormale $(x_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne si et seulement si pour tout x et tout y on a $< x|y >= \sum_i < x_i|x > . < x_i|y >$.*
• *Une famille orthonormale $(x_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne si et seulement si elle est maximale pour l'inclusion.*

Démonstration : Pas très dur, dans le même style que le théorème précédent, j'ai pas la patience de détailler...□

La proposition suivante permet de se ramener à une forme plus "visuelle" des espaces de Hilbert.

Théorème 159 (Riesz-Fischer - Isomorphisme sur un l^2) *Soit H un espace de Hilbert, et $(x_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de H. Alors l'application $x \mapsto (< x_i|x >)_{i\in I}$ est un isomorphisme de H sur $l^2(I)$.*

Démonstration : • L'application $\phi = x \mapsto (< x_i|x >)_{i\in I}$ est bien à valeurs dans $l^2(I)$, vu la relation de Parseval (théorème 157).
• ϕ est linéaire, conserve la norme.
• ϕ conservant la norme, ϕ est injective.
• ϕ conservant la norme, ϕ conserve les distances, et donc son image est un sous-espace vectoriel complet, donc fermé de $l^2(I)$.
• $\phi(x_i)$ est la fonction caractéristique du singleton i ; or les combinaisons linéaires de ces fonctions sont denses dans $l^2(I)$, donc $\phi(H)$ est dense.
• $\phi(H)$ est dense et fermé, donc il est égal à $l^2(I)$.
• Le produit scalaire est continu, donc le fait qu'il soit conservé sur les x_i suffit à montrer qu'il est conservé partout.□

Un résultat utérieur donnera toute sa puissance à ce résultat, en montrant que tout espace de Hilbert possède une base hilbertienne.
⚠ Il ne s'agit pas d'un isomorphisme ramenant tous les espaces de Hilbert possédant une base à un seul, car I peut avoir des cardinaux différents.

Lemme 160 *Soit H un espace de Hilbert . Soit E un sous-espace vectoriel fermé de H. Si E n'est pas égal à H, alors il existe x dans H de norme 1 orthogonal à E.*

Démonstration : Il suffit de considérer $x - y$, pour $x \in E^c$ et y projeté de x sur E.□

Théorème 161 *Tout espace de Hilbert possède une base hilbertienne .*

⚠ Nécéssite l'usage de l'axiome du choix !

Démonstration : On considère l'ensemble des familles orthonormales, munies de l'inclusion. Il s'agit bien d'un ensemble inductif (si l'on considère une chaîne de familles orthonormales, leur réunion est bien un majorant), et donc par le lemme de Zorn (voir le lemme **??**) il admet un élément maximal. On considère l'adhérence du sous-espace vectoriel engendré par cette famille, et si l'on n'obtient par H lui-même, on applique le lemme 160, et on contredit la maximalité de notre famille orthonormale.□

Corollaire 162 (Corollaire des deux théorèmes précédents) *Tout espace de Hilbert est isomorphe à $l^2(I)$ pour un certain I.*

Rappelons que $\mathcal{L}(E,F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F, avec E et F des espaces vectoriels , et que pour E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel on note E' le dual topologique de E, c'est à dire $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$.

Théorème 163 *Soit H un espace de Hilbert réel (resp. complexe). Alors l'application $\phi : H \to H'$, $x \mapsto \phi(x) = (y \mapsto < x|y >)$ est une bijection linéaire (resp. semi-linéaire).*

Démonstration : • La linéarité (resp. semi-linéarité) est claire.
• L'injectivité n'est pas bien difficile ; il suffit de voir que si $\phi(x) = \phi(y)$, alors pour tout $z < x|z >=< y|z >$, et on conclut en considérant une base hilbertienne, ou bien en considérant $< x-y|x-y >=< x|x-y > - < y|x-y >= 0$...
• La surjectivité est plus intéressante. Soit f une forme linéaire continue sur H, autre que la forme linéaire nulle. Son noyau est un sous-espace vectoriel fermé E de H. On considère F l'orthogonal de E ; E et F sont en somme directe, car E est de codimension 1 en tant que noyau d'une forme linéaire, et F est de dimension au moins 1 (voir lemme 160), et bien sûr $E \cap F$. On considère alors y dans F, non nul, et $x = \frac{f(y)}{\|y\|^2}.y$. On vérifie que $\phi(x) = f$ sur F, sur E, et donc sur H tout entier.

Proposition 164 (Procédé d'orthonormalisation de Schmidt) *Etant donnée une famille $(x_i)_{i\in[0,N[}$ avec $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ libre de H (H espace de Hilbert), il existe une famille $(y_i)_{i\in[0,N[}$ orthonormale telle que le sous-espace vectoriel engendré par $(y_i)_{i\in[1,k]}$ soit égal au sous-espace vectoriel engendré par $(x_i)_{i\in[1,k]}$ pour tout $k < N$.*

Démonstration : Il suffit de procéder comme suit :

$$y_0 = x_0/\|x_0\|$$

et pour $n > 0$

$$z_n = x_n - \sum_{i=0..n-1} < y_i|x_n > .y_i$$

et

$$y_n = z_n/\|z_n\|$$

Et ça marche tout seul.□

Exemple Maple

Ci-dessous une implémentation dans le cadre des polynômes orthogonaux (voir partie **??**).

$> \ scalaire := (f,g) -> int(f*g, t=0..1);$
$> \ norme := f -> sqrt(scalaire(f,f));$
$>$
$N := 3; x := array(0..N); \ for\ i\ from\ 0\ by\ 1\ to\ N\ do\ x[i] := t^i; \ od; \ y := array(0..N); \ z := array(0..N);$
$> \ y[0] := x[0]/norme(x[0]); for\ i\ from\ 1\ by\ 1\ to\ N\ do\ z[i] := x[i]; \ for\ j\ from\ 0\ by\ 1\ to\ (i-1)\ do\ z[i] := z[i] - scalaire(x[i], y[j]) * y[j]; \ od; \ y[i] := simplify(z[i]/norme(z[i])); od;$
$> \ A := linalg[matrix](N+1, N+1); for\ i\ from\ 0\ by\ 1\ to\ N\ do\ for\ j\ from\ 0\ by\ 1\ to\ N\ do\ A[i+1, j+1] := simplify(scalaire(y[i], y[j])); od; od; evalm(A);$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(une partie des réponses de Maple est supprimée par économie de place)

Proposition 165 *Si $N < +\infty$ alors la matrice de passage de la base des y_i à la base des x_i est triangulaire de déterminant $\Pi_{i=1..n} < x_i | y_i >$.*

Démonstration : Il suffit de voir que $P_{(y_i),(x_i)} =< x_i | y_j >$. □

3.4.3 Quelques utilisations des espaces de Hilbert

On pourra aller voir par exemple le théorème **??** (une version de théorème de point fixe). La partie **??**, au niveau des séries de Fourier, donne une application très classique des espaces de Hilbert et des bases hilbertiennes.

3.5 Espaces euclidiens

3.5.1 Les bases

Définition 166 (Espace euclidien) *On appelle* **espace euclidien** *un espace préhilbertien réel de dimension finie non nulle.*
Un endomorphisme d'un espace euclidien est dit **orthogonal** *si l'image d'une certaine base orthonormale est une base orthonormale.*
On appelle **similitude** *d'un espace euclidien un endomorphisme égal à la composée d'une homothétie (i.e. une application du type $E \to E, x \mapsto \lambda.x$) et d'un automorphisme orthogonal.*
On appelle **rapport** *d'une similitude le rapport d'une homothétie de la décomposition de cette similitude en une homothétie et un automorphisme (le rapport est unique).*

Un espace euclidien est donc en particulier est espace préhilbertien et un espace de Hilbert ; on pourra donc consulter la partie 3 et plus spécialement la partie 3.4 pour avoir les bases.

Proposition 167 • *L'image de toute base orthonormale par un endomorphisme orthogonal est une base orthonormale.*
• *Un endomorphisme est orthogonal si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est une matrice orthogonale.*
• *Un espace euclidien est un espace de Hilbert.*
• *$\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien canonique (i.e. $< x|y >= \sum_{i\in[1,n]} x_i.y_i$) est un espace euclidien.*
• *Un espace euclidien est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien canonique pour un certain n.*

Démonstration : Un espace euclidien est de dimension finie, en dimension finie toutes les normes sont équivalentes, donc l'espace est isomorphe au sens des espaces vectoriels normés à $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme usuelle et est donc complet. Donc c'est un espace de Hilbert. Donc il admet une base orthonormale. Le tour est joué.□

Soit E un espace euclidien, n sa dimension.
Les résultats suivants sont trop faciles pour valoir une démonstration (notez toutefois qu'ils n'apparaissent faciles qu'au vu des parties précédentes) :
• L'application $x \mapsto (y \mapsto < x|y >)$ est un isomorphisme de E sur E^*.
• Toute forme linéaire sur E s'écrit $< x|. >$ pour un certain x de E.
• Il existe une base orthonormale de E, qui est d'ailleurs une base hilbertienne aussi.

Définition 168 *Il y a plusieurs notions d'***angles** *à définir :*
On définit l'angle entre deux vecteurs non nuls x et y comme étant le réel θ de $[0, \Pi]$ tel que $cos(\theta) = \frac{<x|y>}{\|x\|.\|y\|}$.
On définit l'angle entre deux droites par l'angle entre un vecteur d'une base de l'une et un vecteur d'une base de l'autre.
On définit l'angle entre deux hyperplans comme l'angle entre les droites qui leurs sont orthogonales.
On définit l'angle entre une droite et un hyperplan comme l'angle entre la droite et la droite orthogonale à l'hyperplan.
On dit que deux sous-espaces vectoriels de E sont **perpendiculaires** *s'ils sont orthogonaux.*

Proposition 169 *Un endomorphisme est une similitude si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*
• *il est bijectif*
• *il conserve l'écart angulaire*

Démonstration : Il est très facile de vérifier qu'une similitude vérifie bien les deux propriétés annoncées.

Réciproquement, supposons les deux propriétés vérifiées par un endomorphisme f. Alors :

• Considérons l'application $g : x \mapsto \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$, pour x non nul.
• Conservant l'écart angulaire, l'application f conserve aussi l'orthogonalité.
• Etant donnés x et y distincts, $z = y - \frac{<x|y>}{\|x\|^2}x$ est orthogonal à x.
• $f(z)$ est donc orthogonal à $f(x)$.
• En développant $< f(x)|f(z) >$ puis en factorisant par $< x|y >$ $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$, on obtient que $g(x) = g(y)$.
• g est donc constante, égale à μ.
• $\frac{1}{\mu}f$ conserve donc la norme, et donc est orthogonal d'après la proposition 172. Par définition, f est donc une similitude. □


La preuve ci-dessus montre qu'en fait suffisant qu'un endomorphisme bijectif conserve l'orthogonalité pour qu'on puisse conclure qu'il s'agit d'une similitude.

3.5.2 Endomorphisme adjoint

Théorème 170 *Pour tout endomorphisme f d'un espace euclidien E, il existe un et un seul endomorphisme f^* tel que pour tout x et tout y de E, $< f(x)|y >=< x|f^*(y) >$.*

Démonstration : • Existence et unicité de f^* : pour tout y, l'application $x \mapsto < f(x)|y >$ est une forme linéaire ; donc par l'isomorphisme décrit plus haut entre E et son dual il existe un unique $f^*(y)$ tel que pour tout $x < f(x)|y >=< x|f^*(y) >$.
• Linéarité de f^* : soit

$$< f(x)|\lambda_1.y_1 + \lambda_2.y_2 >= \lambda_1. < f(x)|y_1 > +\lambda_2. < f(x)|y_2 >$$

$$= \lambda_1. < x|f^*(y_1) > +\lambda_2. < x|f^*(y_2) >$$

$$=< x|\lambda_1.f^*(y_1) > + < x|\lambda_2.f^*(y_2) >$$

$$=< x|\lambda_1.f^*(y_1) + \lambda_2.f^*(y_2) >$$

pour tout x et donc

$$f^*(\lambda_1.y_1 + \lambda_2.y_2) = \lambda_1.f^*(y_1) + \lambda_2.f^*(y_2)$$

ce qui conclut la preuve.□

Définition 171 • *f^* est appelé* **endomorphisme adjoint** *de f.*
• *f est dit* **orthogonal** *si $f^*.f = f.f^* = Id$.*
• *f est dit* **symétrique** *si $f^* = f$.*
• *On note $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E.*
• *f est dit* **antisymétrique** *si $f^* = -f$.*
• *On note $A(E)$ l'ensemble des endomorphismes antisymétriques de E.*
• *On appelle* **groupe orthogonal de** *E et on note $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E ; c'est un sous-groupe de $GL(E)$, ensemble des automorphismes de E.*
• *On appelle* **groupe spécial orthogonal de** *E et on note $SO(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E de déterminant 1 ; c'est un sous-groupe de $O(E)$.*

Quelques propriétés faciles de E euclidien :
• Un endomorphisme est orthogonal si et seulement si son adjoint l'est.
• L'application $f \mapsto f^*$ est un endomorphisme de $L(E)$; c'est un endomorphisme involutif, c'est à dire que f^{**} est égal à f.
• $Ker\ f^* = (Im\ f)^\perp$
• $Im\ f^* = (Ker\ f)^\perp$
• $Ker\ f = (Im\ f^*)^\perp$
• $Im\ f = (Ker\ f^*)^\perp$
• $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$
• $Mat_B(f^*) = {}^t\ Mat_B(f)$
• f est diagonalisable $\iff$ f^* est diagonalisable.
• si f est inversible, alors f^* aussi et $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.
• F sous-espace vectoriel de E est stable par f si et seulement si $F^\perp$ est stable par f^*.
• Un endomorphisme et son adjoint ont même polynôme caractéristique.

A peine plus dur :

Proposition 172 • *Un endomorphisme est orthogonal si et seulement si il conserve le produit scalaire.*
• *Un endomorphisme est orthogonal si et seulement si il conserve la norme.*

Démonstration : Il est vite vu que les conditions en question sont équivalentes entre elles, car la norme s'exprime en fonction du produit scalaire, et le produit scalaire en fonction de la norme ; le calcul est facile. On va donc se contenter de montrer les deux implications suivantes :
• Si f est orthogonal, alors f conserve la norme : évident car

$$\|x\|^2 =< f(x)|f(x) >=< x|f^{-1}(f(x)) >=< x|x >= \|x\|^2$$

• Si f conserve le produit scalaire, alors f est orthogonal :
- f est injectif puisqu'il conserve la norme
- on est en dimension finie, donc f est inversible
- $< f(x)|y >=< f(x)|f(f^{-1}(y)) >=< x|f^{-1}(y) >$ et donc $f^{-1} = f^*$.□

On peut aussi noter le résultat amusant suivant :

Proposition 173 • *Une application de E dans E avec E euclidien conservant le produit scalaire est linéaire.*
• *Une application de E dans E avec E euclidien conservant la norme est linéaire.*

Démonstration : • Il suffit de développer $\|f(\lambda.x + \mu.y) - \lambda.f(x) - \mu.f(y)\|$ et de calculer un peu.
• Un peu de calcul sur les formules liant produit scalaire et norme suffit...□

Corollaire 174 *f est orthogonal si et seulement si l'image d'une base orthonormale est une base orthonormale.*
L'image d'une base orthonormale par un endomorphisme orthogonal est une base orthonormale.

Corollaire 175 *Une application de E dans E avec E euclidien est une isométrie si et seulement si c'est la composée d'une translation et d'un endomorphisme orthogonal.*

Démonstration : Il est évident que la composée d'une translation et d'un endomorphisme orthogonal est une isométrie. Réciproquement, on procède comme suit :
• On se donne f une isométrie de E dans E

• On considère $g = (x \mapsto x - f(0) \circ f$
• On montre que g conserve la norme
• On conclut par la proposition 173.□

Quelques propriétés faciles des endomorphismes orthogonaux, utilisant les résultats ci-dessus ;

Proposition 176 *Soit $f \in O(E)$:*
• *Le spectre de f est inclus dans $\{-1, 1\}$*
• *Le déterminant de f est -1 ou 1*
• *F est stable par $f \iff F^{\perp}$ est stable par F* • *Un endomorphisme orthogonal a toutes ses valeurs propres égales à 1 ou -1*
• *Un endomorphisme orthogonal diagonalisable est une symétrie orthogonale (voir1.3.2*
• $E = Im\ (f - I) \oplus Ker\ (f - I)$

Quelques résultats sur les endomorphismes symétriques et antisymétriques (E un espace euclidien) :

Proposition 177 • *Un endomorphisme est symétrique (resp. antisymétrique) si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est symétrique (resp. antisymétrique)*
• *L'ensemble $L(E)$ des endomorphismes de E est somme directe de l'ensemble $S(E)$ des endomorphismes symétriques et de l'ensemble $A(E)$ des endomorphismes antisymétriques ; $L(E) = S(E) \oplus A(E)$.*
• $dim\ L(E) = n^2$ *avec* $n = dim\ E$
• $dim\ S(E) = \frac{1}{2}n.(n+1)$ *avec* $n = dim\ E$
• $dim\ A(E) = \frac{1}{2}n.(n-1)$ *avec* $n = dim\ E$
• *si f est un endomorphisme antisymétrique de E, alors $f \circ f$ est un endomorphisme symétrique*
• *Un endomorphisme f de E est antisymétrique si et seulement si $\forall x \quad < f(x)|x >= 0$*
• *La seule valeur propre possible d'un endomorphisme antisymétrique est 0*
• *L'image et le noyau de f symétrique ou antisymétrique sont supplémentaires orthogonaux*
• *Le rang d'un endormophisme antisymétrique est pair (en effet sa restriction à son image est une bijection et est antisymétrique, donc il n'a pas de valeur propre puisque 0 n'est pas de valeur propre, donc le polynôme caractéristique n'a pas de racine, donc l'image est de dimension paire)*
• *Les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont supplémentaires et orthogonaux.*
• *Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme symétrique est scindé sur $\mathbb{R}$ (c'est à dire que la somme des multiplicités de ses racines sur $\mathbb{R}$ est égal à son degré).*
• *Un endomorphisme symétrique est diagonalisable dans une base orthonormale*

Démonstration : La seule chose qui justifie que l'on fasse une preuve est l'avant-dernier point, qui entraîne le dernier.
• On se donne f un endomorphisme symétrique, et M sa matrice dans une base orthonormale.
• Soit λ une racine dans $\mathbb{C}$ du polynôme caractéristique de M.
• On peut trouver un vecteur colonne C (à coefficients complexes non nuls) tel que $M.C = \lambda.C$
• ${}^t\overline{X}.M.X = \lambda.{}^t\overline{X}.X$
• en conjuguant et en transposant on obtient ${}^t\overline{X}.(\tau\overline{M}).X = \overline{\lambda}\,{}^t\overline{X}.X$ c'est à dire ${}^t\overline{X}.M.X = \overline{\lambda}\,{}^t\overline{X}.X$
• on a donc $\lambda.{}^t\overline{X}.X = \overline{\lambda}.{}^t\overline{X}.X$
• ${}^t\overline{X}.X$ est non nul donc $\lambda \in \mathbb{R}$ et c'est fini.□

3.5.3 Orientation d'un espace euclidien

On pourra consulter au préalable la partie2.

Définition 178 *On appelle* **espace euclidien orienté** *un couple (E, C) où E est un espace euclidien et C une classe d'équivalence sur l'ensemble des bases de E pour la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par*

$$B\mathcal{R}B' \iff det\ P_{B,B'} > 0$$

*L'***orientation de** F **sous-espace vectoriel de dimension** $n-p$ **de** (E, C) **espace euclidien orienté de dimension** n **suivant** $(e_1, ..., e_p)$ **une base d'un supplémentaire de** F *est l'espace euclidien orienté*

$$(F, \{(e_{p+1}, ..., e_n)/(e_1, ..., e_n) \in C\})$$

(il s'agit d'un espace euclidien orienté)
On appelle **base directe** *de l'espace euclidien orienté (E, C) une base appartenant à C.*
On appelle **base indirecte** *de l'espace euclidien orienté (E, C) une base n'appartenant pas à C.*

⚠ Il n'y a que deux orientations possibles d'un même espace euclidien.

L'espace euclidien orienté usuel correspondant à $\mathbb{R}^n$ est donné par la base (directe par définition)

$$((1, 0, ..., 0), (0, 1, 0, ..., 0), (0, 0, 1, 0, ..., 0), ..., (0, 0, ..., 0, 1, 0), (0, ..., 0, 1)).$$

Propriétés faciles : (E est un espace euclidien donné, de dimension n)
• Si σ est une permutation paire (resp. impaire) et si $e_1, ..., e_n$ est une base de E espace euclidien, alors $(e_i)_{i\in[1,n]}$ et $(e_{\sigma(i)})_{i\in[1,n]}$ sont dans la même classe d'équivalence (resp. ne sont pas dans la même classe d'équivalence) (voir 2.5.4 pour en être complètement convaincu).

• Si $(e_i)_{i\in[1,n]}$ et $(f_i)_{i\in[1,n]}$ sont deux bases de E avec $f_i = f(e_i)$ (f est donc un automorphisme), alors les bases $(e_i)_{i\in[1,n]}$ et $(f_i)_{i\in[1,n]}$ sont dans la même classe d'équivalence si et seulement si $det\ f > 0$ (en effet f est alors l'endomorphisme de la matrice de passage de la base des e_i à la base des f_i.
• si B et B' sont dans la même classe alors $det_B(.) = det_{B'}(.)$.

Ceci permet d'introduire de nouvelles définitions :

Définition 179 *On appelle* **produit mixte** *d'un espace euclidien (E, C) de dimension n l'application det_B pour une base $B \in C$ quelconque ; on le note $(x_1, ..., x_n) \mapsto [x_1, ..., x_n] = det_B(x_1, ..., x_n)$.*
Si E est un espace euclidien de dimension 3, alors étant donnés a et b dans E, l'application qui à x dans E associe $[a, b, x]$ est linéaire, donc elle est égale à $x \mapsto < c|x >$ pour un certain $c \in E$ (voir le théorème 163) ; on note $a \wedge b$ l'élément c de E, et on l'appelle **produit vectoriel de a et b.**

 Le produit vectoriel n'est pas commutatif !

 Intuitivement, le produit mixte de $(x_1, ..., x_n)$ est le volume algébrique (lié à l'orientation) de $\{O + t_1.x_1 + t_2.x_2 + ... + t_n.x_n / (t_1, ..., t_n) \in [0, 1]^n\}$ (indépendamment de O).

Proposition 180 *Propriétés du produit mixte et du produit vectoriel (celles du produit mixte sont valables en toute dimension ; le produit vectoriel n'est défini qu'en dimension* 3*) (dans les deux cas rien n'est possible en dehors d'un espace euclidien orienté) :*

• $a \wedge b \in Vect(a,b)^{\perp}$

• $a \wedge b = -b \wedge a$

• $a \wedge b = 0 \iff a$ *et* b *sont liés*

• $(a,b) \mapsto a \wedge b$ *est bilinéaire*

• (a,b) *libre* $\rightarrow (a,b,a \wedge b)$ *est une base directe*

• *Le produit mixte d'une base est non nul*

• *Le produit mixte d'une base directe est strictement positif*

• *Le produit mixte d'une base indirecte est strictement négatif*

• *Une famille est une base orthonormale directe si et seulement si son produit mixte est* 1

• *Une famille est une base orthonormale indirecte si et seulement si son produit mixte est* -1

• $[f(x_1),...,f(x_n)] = (det\ f)[x_1,...,x_n]$

• *Dans* $\mathbb{R}^3$*, le produit vectoriel de* (x,y,z) *par* (x',y',z') *est égal à*

$$(y.z' - z.y', z.x' - x.z', x.y' - -y.x')$$

moyen mnémotechnique : ce sont les cofacteurs de la troisième colonne dans la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} x & x' & ? \\ y & y' & ? \\ z & z' & ? \end{pmatrix}$$

• $(a \wedge b) \wedge c = < a|c > .b - < b|c > .a$

• $a \wedge (b \wedge c) = < a|c > .b - < a|b > .c$

• *Si* E *est euclidien orienté de dimension* 3*, alors l'application* ϕ *de* E *dans* $L(E)$ *définie par* $\phi(x) = (y \mapsto x \wedge y)$ *est à valeurs dans l'ensemble des endomorphismes antisymétriques de* E *; en restreignant l'espace d'arrivée à l'ensemble des endomorphismes antisymétriques de* E *c'est un isomorphisme de* E*.*

La matrice de $\phi(u)$ *avec* $u = (x,y,z)$ *est* $\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$ *dans la même base.*

Toutes ces propriétés s'obtiennent facilement en considérant simplement la définition du produit mixte ou du produit vectoriel.

Proposition 181 (Identité de Lagrange)

$$\|a \wedge b\|^2 = \|a\|^2.\|b\|^2 - < a|b >^2$$

Démonstration : On suppose a et b libres, sinon le résultat est clair par Cauchy-Schwartz (voir la partie 3.1).

$$[a, b, a \wedge b]^2 = \begin{vmatrix} < a|a > & < a|b > & 0 \\ < a|b > & < b|b > & 0 \\ 0 & 0 & < a \wedge b|a \wedge b > \end{vmatrix} = \|a \wedge b\|^2.(\|a\|^2.\|b\|^2 - < a|b >^2)$$

mais on a aussi

$$[a, b, a \wedge b]^2 = < a \wedge b|a \wedge b >^2 = \|a \wedge b\|^4$$

D'où le résultat désiré.□

Corollaire 182

$$\|a \wedge b\| = \|a\| \times \|b\| \times sin(\theta)$$

avec θ l'écart angulaire entre a et b.

Maintenant quelques propriétés un peu plus difficiles.

Proposition 183

$$[x_1, ..., x_n]^2 = det(< x_i|x_j >_{(i,j)\in[1,n]^2})$$

Démonstration : On pose M la matrice $M_{i,j} = e_i^*(x_j)$ avec $(e_i)_{i\in[1,n]}$ une base orthonormale.

$$[x_1, ..., x_n] = det\ M = det\ {}^tM$$
$$[x_1, ..., x_n] = det\ {}^tM.M$$
$$M_{i,j} = < e_i|x_j >$$
$$({}^tM.M)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} < e_k|x_i > . < e_k|x_j >$$

d'où le résultat.□

Proposition 184

$$|[x_1, ..., x_n]| \leq \Pi_{i=1}^n \|x_i\|$$

$$|[x_1, ..., x_n]| = \Pi_{i=1}^n \|x_i\| \iff (\exists i / x_i = 0 \vee (x_i)_{i\in[1,n]} \textit{ est orthogonale})$$

Démonstration : Si le système est lié, le résultat est clair (on rappelle que le déterminant d'une famille liée est nul).
Sinon, on peut construire par la méthode d'orthonormalisation de Schmidt une base $(e_1, .., e_n)$ avec $\forall (i,j) \in [1,n]^2 \ < x_j | e_i > > 0$.
La matrice de passage $P_{(e_i)_{i\in[1,n]},(x_i)_{i\in[1,n]}}$ est triangulaire (voir 164) ; son déterminant est le produit des $< x_i | y_i >$, donc par l'inégalité de Schwartz est inférieur ou égal en valeur absolue au produit des $\|x_i\|$, avec égalité si et seulement si pour tout i x_i et y_i sont liés, donc si la famille est orthonormale.□

3.5.4 Formes quadratiques sur un espace euclidien

Pour plus d'informations on pourra consulter la partie 2.4.3.

3.6 Espaces hermitiens

Pour introduction on pourra consulter la partie 3.2, sur les espaces préhilbertiens complexes.

3.6.1 Définition et premières propriétés

Définition 185 *On appelle* **espace hermitien** *un espace préhilbertien complexe de dimension finie, non réduit à* $\{0\}$.

On rappelle quelques propriétés, issues plus ou moins directement de la définition des espaces préhilbertiens complexes (voir la partie 3.2 pour des rappels) :

• Un espace hermitien est un espace de Hilbert ; toutes les propriétés des espaces de Hilbert sont donc valables ici (voir la partie 3.4)

• $< .|. >$ est sesquilinéaire (i.e. semi-linéaire par rapport à la première variable et linéaire par rapport à la deuxième variable)

• si x est non nul alors $< x|x >$ est un réel > 0 ($< .|. >$ est positive car pour tout x $< x|x >$ est positif et définie car x non nul $\rightarrow < x|x >$ non nul)

• $< .|. >$ est hermitienne, c'est-à-dire $< x|y >= < y|x >$

• toute famille orthonormale peut être prolongée en une base orthonormale

• Pour tout sous-espace F d'un espace hermitien E, on a $E = F \oplus F^\perp$ et $F = F^{\perp\perp}$

• Etant donnée une base orthonormale $(e_i)_{i\in[1,n]}$ de E hermitien, tout vecteur x de E vérifie

$$x = \sum_{i=1..n} < e_i | x > e_i$$

• Etant donnée une base $(x_i)_{i\in[1,n]}$ d'un espace hermitien, il existe une base orthonormale $(y_i)_{i\in[1,n]}$ telle que pour tout j y_j est combinaison linéaire des x_i pour $1 \leq i \leq j$ (voir 164)

• Etant donné E un espace hermitien l'application qui à x associe l'application $y \mapsto < x|y >$ est un semi-isomorphisme de E sur E^*.

• En corollaire de la propriété ci-dessus, étant donné E un espace hermitien de dimension n, pour toute famille $(x_1, ..., x_n)$ de $\mathbb{C}^n$ et toute base $(e_1, ..., e_n)$ de E, il existe un unique x dans E tel que $< x|e_i >= x_i$ (on aurait pu, au lieu de $< x|e_i >= x_i$, demander $< e_i|x >= x_i$, comme on s'en rend facilement compte en considérant le fait que $< .|. >$ est hermitienne).

• Etant donnée $(e_i)_{i\in[1,n]}$ une base orthonormale de E avec E hermitien, la famille des $(x \mapsto < e_i|x >$ est la base duale de la base des $(e_i)_{i\in[1,n]}$ (il s'agit de l'image de la famille des e_i par le semi-isomorphisme ci-dessus).

⚠ La dernière propriété nécéssite que la famille soit orthonormale !

$\mathbb{C}^n$ muni de l'application $(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i \times y_i$ est un espace hermitien.

De même que les espaces euclidiens sont isomorphes à $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien usuel, on retiendra que les espaces hermitiens sont isomorphes à $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire hermitien usuel (ce qui fait que beaucoup de propriétés intuitives se retrouvent vraies).

3.6.2 Adjoint d'un endomorphisme d'un espace hermitien

Théorème 186 *Pour tout endomorphisme f de l'espace hermitien E il existe un et un seul endomorphisme f^* de E tel que pour tout $(x, y) \in E^2$ on ait $< f(x)|y >=< x|f^*(y) >$.*

Démonstration :

• Existence

L'application f^* $x \mapsto \sum_{i=1}^{n} < f(e_i)|x > .e_i$.

• Unicité

$< e_i|f^*(x) >=< f(e_i)|x >$, donc $f^*(x)$ est entièrement déterminé par ses coordonnées.□

Proposition 187 *L'application F qui à f associe f^* est un semi-endomorphisme de $L(E)$. F est involutif, c'est à dire que $F \circ F = I$.*

Démonstration : Facile !□

Définition 188 • *f^* s'appelle l'***adjoint** *de f.*
• *f endomorphisme d'un espace hermitien E est dit* **unitaire** *lorsque $f \circ f^* = f^* \circ f = I$.*
• *f endomorphisme d'un espace hermitien E est dit* **hermitien** *lorsque $f = f^*$.*
• *Une matrice carrée M à coefficients dans $\mathbb{C}$ est dite* **unitaire** *si elle vérifie $\overline{{}^tM}.M = I$.*
• *Une matrice carrée M à coefficients dans $\mathbb{C}$ est dite* **hermitienne** *si elle vérifie $\overline{{}^tM} = M$.*

On remarque donc qu'un endomorphisme unitaire est un endomorphisme inversible f tel que pour tout x et tout y de $E < f(x)|y >=< x|f^{-1}(y) >$.

Par ailleurs un endomorphisme f d'un espace hermitien est hermitien lorsque pour tout x et tout y de E on a $< f(x)|y >=< x|f(y) >$.

Sans surprise suite au cas euclidien, un endomorphisme f d'un espace hermitien est unitaire si et seulement si il conserve le produit scalaire, i.e.

$$< f(x)|f(y) >=< x|y >$$

Ou même simplement la norme, i.e.

$$\|f(x)\| = f(x)$$

De même que dans le cas des euclidiens, on note que l'adjoint de l'inverse (quand il existe) est l'inverse de l'adjoint (qui dans ce cas existe nécessairement), que l'orthogonal de l'image est le noyau de l'adjoint, et que l'image de l'adjoint est l'orthogonal du noyau ; que $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

De même qu'un endomorphisme d'un espace euclidien est orthogonal si et seulement si l'image d'une base orthonormale est orthonormale, un endomorphisme d'un espace hermitien est unitaire si et seulement si l'image d'une base orthonormale est une base orthonormale.

Alors que dans le cas euclidien et *dans une base orthonormale* la matrice de l'adjoint est la transposée de la matrice, dans le cas hermitien et *dans une base orthonormale* la matrice de l'adjoint est la conjuguée de la matrice transposée. C'est-à-dire

$$Mat_{(e_i)_{i\in[1,n]}}(f) = \overline{{}^tMat_{(e_i)_{i\in[1,n]}}(f)}$$

Conséquence logique de ce qui précède, un endomorphisme est unitaire si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est unitaire.

Et un endomorphisme est hermitien si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est hermitienne.

Les valeurs propres d'une matrice hermitienne (ou d'un endomorphisme hermitien) sont toutes réelles.

⚠ Le polynôme caractéristique de f^* est le conjugué du polynôme caractéristique de f

On pourra consulter la partie**??** pour plus d'informations sur la structure de l'ensemble des endomorphismes unitaires.

Le spectre d'une matrice unitaire est inclus dans le cercle unité ; son déterminant appartient donc aussi à ce cercle unité.

Proposition 189 (Sur les endomorphismes hermitiens) *L'image et le noyau d'un endomorphisme hermitien sont orthogonaux.*
Les sous-espaces propres d'un endomorphisme hermitien sont en somme directe orthogonale.
Si f est un endomorphisme hermitien et si F est un sous-espace stable par f alors $F^{\perp}$ est stable par f qui induit sur cet espace un endomorphisme hermitien.
Si f est un endomorphisme hermitien, alors f est diagonalisable dans une certaine base orthonormale.

Démonstration : Même principe que dans le cas euclidien.□

De même, si M est une matrice complexe hermitienne, alors il existe P unitaire telle que ${}^t\overline{P}.M.P$ soit diagonale.

3.6.3 Formes quadratiques sur un espace hermitien E

Voir la partie2.4.4.

Chapitre 4

Algèbre linéaire en dimension finie

4.1 Généralités

Définition 190 *Un espace vectoriel est dit* **de dimension finie** *lorsqu'il admet une base de cardinal finie. Dans le cas contraire il est dit* **de dimension infinie**. *Dans un espace fini le cardinal d'une base est appelé* **dimension** *de l'espace (il faudra voir plus loin que toutes les bases ont alors même cardinal). Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E est dit de* **codimension finie** *si la dimension de l'espace quotient est finie. On appelle alors* **codimension** *de cet espace la dimension de l'espace quotient. Sinon il est dit de* **codimension infinie**.

Dans la suite E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Théorème 191 (Théorème de la base incomplète) *Si I est une famille libre et K une famille génératrice finie, avec $I \subset K$, alors il existe J avec $I \subset J \subset K$ tel que J soit une base.*

Démonstration : On considère J libre maximal au sens du cardinal vérifiant $I \subset J \subset K$. Si toute famille plus grande incluse dans K est liée, alors tout élément de K est combinaison linéaire d'éléments de J ; tout élément de E s'écrit comme combinaison d'éléments de K, qui eux-mêmes s'écrivent comme combinaisons linéaires d'éléments de J. Donc la famille J est génératrice.□

Lemme 192 (Lemme de Steinitz) *Si E est non réduit à $\{0\}$, E admettant une famille génératrice I de cardinal n, toute famille de $n+1$ vecteurs (ou plus) est liée.*

Démonstration : • Le cas $n = 1$ est trivial. On procède alors par récurrence.

• Supposons la propriété vraie pour $n < N$ et soit $n = N$; supposons E admettant une famille génératrice $b_1, ..., b_n$ de cardinal n. Notons F le sous-espace vectoriel de E engendré par $b_1, ..., b_{n-1}$.

• Donnons-nous une famille $e_1, ..., e_{n+1}$ de E.

• Soit, pour $i \in [1, n+1]$, $f_i \in F$ et $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tel que $e_i = f_i + \lambda_i\, b_n$.

• Si tous les λ_i sont nuls, alors l'hypothèse de récurrence appliquée à F permet de conclure.

• Supposons alors $\lambda_1 \neq 0$; dans ce cas, $b_1 = \frac{1}{\lambda_1}(e_1 - f_1)$.

• On peut alors exprimer $e_i - f_i$ en fonction de $e_1 - f_1$ pour tout i, puis $z_i = e_i - \frac{\lambda_i}{\lambda_1} e_1$ comme combinaison linéaire des y_i, donc comme éléments de F pour tout $i > 1$.

• L'hypothèse de récurrence permet alors de conclure que les z_i pour $i > 1$ sont liés.

• On écrit alors $\sum \alpha_i z_i = 0$, avec les α_i non tous nuls ; en développant $z_i = e_i - \frac{\lambda_i}{\lambda_1} e_1$, on obtient une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls des e_i. D'où le résultat.□

Théorème 193 *Dans un espace de dimension finie, toutes les bases ont le même cardinal.*

Démonstration : Conséquence immédiate du lemme 192.□

Théorème 194 *Deux espaces vectoriels de dimension finie sur le même corps sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension.*

Démonstration : S'ils sont isomorphes, l'image d'une base de l'un par un isomorphisme est base de l'autre, donc ils ont même dimension. S'ils ont même dimension, alors avec $(e_1, ..., e_n)$ une base de l'un, et $(f_1, ..., f_n)$ une base de l'autre, l'application $\sum \lambda_i e_i \mapsto \sum \lambda_i f_i$ pour $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ est un isomorphisme, comme on le vérifie facilement (la fonction est bien définie car $(e_1, ..., e_n)$ est une base, linéarité évidente, injectivité immédiate car $(f_1, ..., f_n)$ est libre, surjectivité immédiate car $(f_1, ..., f_n)$ est génératrice).□

Théorème 195 *F, sous-espace vectoriel de E, est égal à E si et seulement si $dim\ E = dim\ F$.*

Démonstration : Il est clair que si F et E sont égaux, alors ils ont même dimension. Réciproquement, s'ils ont même dimension, alors une base de F est une famille libre de même cardinal qu'une base de E, donc c'est une base de E (voir le lemme de Steinitz ci-dessus).□

Théorème 196 *Tout sous-espace vectoriel de E (E est supposé non nul) admet un supplémentaire, et si $E = F \oplus G$, alors $dim\ E = dim\ F + dim\ G$, et une base de E s'obtient en réunissant une base de F et une base de G.*

Démonstration : Conséquence du théorème de la base incomplète.□

Maintenant quelques théorèmes faciles, sans démonstration, mais fort pratiques néanmoins :

Théorème 197 *Etant donnés F et G des sous-espaces vectoriels de E, on a $dim\ (F + G) + dim\ (F \cap G) = dim\ F + dim\ G$.*

Théorème 198 *F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si leur intersection est nulle et si la somme de leurs dimensions soit la dimension de E.*

Théorème 199 *F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si leur intersection est nulle et si leur somme est égale à E.*

Théorème 200 *F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si leur somme est égale à E et si la somme de leurs dimensions est égale à la dimension de E.*

Théorème 201 *Etant donnés F sous-espace vectoriel de E, la dimension de E/F est égale à la dimension de E moins la dimension de F.*

Théorème 202 *Si les E_i sont de dimension finie, alors $dim\ \Pi_{i=1..n} E_i = \sum_i dim\ E_i$.*

Théorème 203 *Si E et F sont de dimension finie, alors $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et $dim\ \mathcal{L}(E,F) = dim\ E.dim\ F$.*

Démonstration : On considère une base de E et une base de F, notées respectivement (e_i) et (f_i) ; alors les $\delta_{i,j}$ définies par $\delta_{i,j}(e_i) = f_j$ et $\delta_{i,j}(e_l) = 0$ pour $l \neq i$ forment une base de $\mathcal{L}(E,F)$.□

Définition 204 *On appelle* **rang** *d'une famille finie de vecteurs la dimension de l'espace vectoriel que cette famille engendre.*
On appelle **rang** *d'une application linéaire la dimension de son image lorsque celle-ci est finie. C'est en fait le rang de l'image d'une base lorsque l'espace de départ est de dimension finie*

Théorème 205 (Théorème du rang) *Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et E et F de dimension finie, alors $Im\ f$ et $Ker\ f$ sont de dimension finie, et $dim\ E = dim\ Im\ f + dim\ Ker\ f$.*

Démonstration : On considère un supplémentaire du noyau, et on montre qu'il est isomorphe à l'image de f (voir théorème 19).□

Corollaire 206 *Soit f une application d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F, avec E et F de dimension finie et de même dimension, alors f est un isomorphisme si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :*
- *f a un noyau réduit à un singleton*
- *f est injective*
- *f est surjective*
- *f est bijective*
- *Le rang de f est égal à la dimension de E*

Proposition 207 (Quelques propriétés du rang)
- *Le rang d'une famille finie de vecteurs est invariant par permutations*
- *Multiplier un vecteur d'une famille par un scalaire non nul ne change pas le rang de la famille*
- *On ne change pas le rang d'une famille de vecteurs en additionnant à un vecteur une combinaison linéaire des autres vecteurs*
- *Le rang d'une famille de vecteurs est le même si l'on suppirme un vecteur nul*

4.2 Dualité en dimension finie

4.2.1 Dualité simple

E est un espace vectoriel normé de dimension finie n.

Définition 208 *Etant donnée une base $(e_i)_{i\in[1,n]}$ de E, on appelle* **formes coordonnées associées** *les n formes linéaires e_j définies par $e_j^*(e_i) = \delta_{i,j}$.*

On note que $x = \sum_j e_j^*(x).e_j$.

Théorème 209 • $dim\ E^* = dim\ E$.
• *La famille des e_j^* est une base de E^* ; on l'appelle* **la base duale** *de la base (e_i).*
• *Tout f appartenant à E^* s'écrit $f = \sum_i f(e_i).e_i^*$*
• *Pour toute base (f_i) de E^*, il existe une base de E dont la base duale est la base des (f_i).*

Démonstration : La dimension de E^* est égale à la dimension de E, car $dim\ \mathcal{L}(E,K) = dim\ E.dim\ K$; il suffit donc de montrer que la famille est libre. On se donne une combinaison linéaire nulle des e_j^* ; en considérant l'image de la combinaison linéaire nulle de e_i on voit que le coefficient de e_i^* est nulle pour tout i.
On se donne une application ϕ qui à x associe $(f_1^*(x), ..., f_n^*(x))$. On montre sans trop de difficultés que ϕ est un isomorphisme de E dans K^n. Donc il existe une base (e_i) telle que $\phi(e_i) = (d_{1,i}, ..., \delta_{i,i}, ...\delta_{n,i})$; cette base convient.□

Théorème 210 *Soit E et F des $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimensions finies (non nécéssairement égales). Alors l'application transposition qui à $f \in \mathcal{L}(E,F)$ associe ${}^t f \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ est un isomorphisme. En outre le rang de ${}^t f$ est égal au rang de f et*

$$Ker\ {}^t f = (Im\ f)^\perp$$

Démonstration : Facile !□

4.2.2 Bidual

E est un espace vectoriel normé de dimension finie n.

Théorème 211 (Bidual) *L'application de E dans E^{**} qui à x associe la fonction qui à ϕ dans E^* associe $\phi(x)$ est un isomorphisme ; on l'appelle* **isomorphisme canonique** *de E dans E^{**}. On peut donc identifier E et E^{**}.*

Démonstration : Les dimensions de E et E^{**} étant égales (on est toujours dans le cadre de la dimension finie) il suffit de voir que cette fonction est un isomorphisme. Supposons x d'image nulle ; alors quel que soit f, $f(x) = 0$. Si x est non nul, alors on peut l'appeler e_1 et le compléter en une base e_i ; alors on constate que $e_i^*(x) = 0$ pour tout i, ce qui est contradictoire.□

4.2.3 Orthogonalité

E est un espace vectoriel normé de dimension finie n.

Théorème 212 *Quel que soit F sous-espace vectoriel de E, on a :*
- $dim\ E = dim\ F + dim\ F^{\perp}$
- $F^{\perp^o} = F$

Démonstration : Si $F = \{0\}$ alors le résultat est clair. Sinon, on considère une base $(f_i)_{i\in[1,f]}$ de F, et on la complète en une base $(f_i)_{i\in[1,n]}$ de E. On considère la base duale (f_i^*) ; il est clair alors que les $(f_i)_{i>f}$ forment une famille libre génératrice de $F^{\perp}$, d'où la première assertion.
On constate bien que $F^{\perp^o}$ est inclus dans F ; la dimension permet de conclure.□

Théorème 213 *Quel que soit F sous-espace vectoriel de E', on a :*
- $dim\ E = dim\ F + dim\ F^o$
- $F^{o\perp} = F$

Démonstration : La méthode est la même que précédemment ; il faut juste se souvenir que toute base du dual est la base duale d'une certaine base.□

Théorème 214 *Avec ϕ l'isomorphisme canonique de E dans E^{**}, pour tout F sous-espace vectoriel de E, on a $F^{\perp^{\perp}} = \phi(F^{\perp^o}) = \phi(F)$.*

Démonstration : Il n’y a qu’à l’écrire et ça marche tout seul...□

4.3 Calcul matriciel

4.3.1 Bases sur les matrices

Définition 215 (Définitions de base sur les matrices) *On appelle* **matrice de type** (n,p) **sur un corps** $\mathbb{K}$ *toute application de* $[1,n]\times[1,p]$ *(intervalles de* $\mathbb{N}$*) dans* $\mathbb{K}$*. On la représente généralement comme suit :*

$$\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,p} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \dots & m_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & m_{n,p} \end{pmatrix}$$

On note $M_{n,p}(\mathbb{K})$ *l'ensemble des matrices de type* (n,p) *sur le corps* $\mathbb{K}$*.*
On appelle **matrice ligne** *une matrice de type* $(1,p)$*, et bf matrice colonne une matrice de type* $(n,1)$*.*
On appelle **matrice extraite** *d'une matrice de type* (n,p) *la restriction de cette matrice à* $I\times J$*, avec* $I\subset[1,n]$ *et* $J\subset[1,p]$*.*
On appelle i**-ième vecteur-ligne** *de la matrice* M *de type* (n,p) *la restriction de cette matrice à* $\{i\}\times[1,p]$*. On peut identifier un vecteur-ligne à un élément de* $\mathbb{K}^p$*.*
On appelle j**-ième vecteur-colonne** *de la matrice* M *de type* (n,p) *la restriction de cette matrice à* $[1,n]\times\{j\}$*. On peut identifier un vecteur-colonne à un élément de* $\mathbb{K}^n$*.*
On appelle **matrice associée** *à un morphisme* f *de l'espace vectoriel* E *de dimension* p *dans l'espace vectoriel* F *de dimension* n *et aux bases* $B=(e_i)$ *et* $B'=(f_i)$ *de* E *et* F *respectivement la matrice* M *de type* (n,p) *telle que* $M_{i,j}=f_i^*(e_j)$*. On la note* $Mat_{B,B'}(f)$*.*
Inversement, on appelle **application linéaire canoniquement associée à la matrice** M *le morphisme de* $\mathbb{K}^p$ *dans* $\mathbb{K}^n$ *dont la matrice associée est* M*.*

Proposition 216 *Une matrice de type* n,p *admet* $C_n^{n'}.C_p^{p'}$ *matrices extraites de type* (n',p')*.*

Proposition 217 E *et* F *étant de dimension respectives* p *et* n *sur le corps* $\mathbb{K}$*, on a*

$$\mathcal{L}(E,F)\simeq\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

via l'isomorphisme $f\mapsto Mat_{B,B'}(f)$*.*
Avec $E=\mathbb{K}^p$ *et* $F=\mathbb{K}^n$*, et* B *et* B' *les bases canoniques, on a alors un isomorphisme canonique entre* $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)$ *et* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*.*

Démonstration : Evident !□

Proposition 218 (Matrice canonique d'une application linéaire en dimension finie) *Soit f une application linéaire entre E, espace vectoriel de dimension p, et F, espace vectoriel de dimension n ; soit r le rang de f. Alors il existe une base B et E et une base B' de F telles que*

$$Mat_{B,B'}(f) = M$$

avec

$$M_{i,j} = 1 \text{ si } i = j \leq r$$

$$M_{i,j} = 0 \text{ sinon}$$

On appelle cette matrice **matrice canonique de** f.

Démonstration : Considérer une base B_1 d'un supplémentaire du noyau de f ; considérer $B_1' = f(B_1)$; considérer B_2 une base du noyau de f, et compléter B_1' en une base B'. Il reste à considérer $B = B_1 \cup B_2$.□

Remarque 219 *La matrice d'une forme linéaire est une matrice-ligne.*

Définition 220 (produit matriciel) *On appelle* **matrice produit** *des matrices A et B de types respectifs (n, q) et (q, p) la matrice C de type (n, p) telle que*

$$C_{i,j} = \sum_{k \in [1,q]} A_{i,k}.B_{k,j}$$

On note $C = A \times B$ ou $C = A.B$.

Proposition 221 • *Le produit matriciel défini ci-dessus est associatif et bilinéaire.*
• *Avec $A = Mat_{B,B'}(f)$ et $B = Mat_{B',B''}(g)$, $B \times A = Mat_{B,B''}(g \circ f)$*
• *Avec $x \in E$, X le vecteur des coordonnées de x dans la base B, alors les coordonnées de $y = f(x)$ dans la base B' sont celles de Y, avec $Y = M \times X$, et $M = Mat_{B,B'}(f)$.*

Démonstration : Facile (et non moins important).□

4.3.2 Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

E et F $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimensions respectives p et n.

Définition 222 *On appelle* **matrices élémentaires de type** (n,p) *les matrices* $E_{i,j}$ *avec* $E_{i,j}(a,b) = \delta_{a,i}.\delta_{b,j}$ *; c'est à dire les matrices de type* (n,p) *ne comportant qu'un* 1 *et des* 0 *partout ailleurs.*

Proposition 223 *$\mathcal{M}_{n,p}(K)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour l'addition terme à terme et pour la multiplication terme à terme par un scalaire.*
L'application de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ qui à une application f associe $Mat_{B,B'}(f)$ est un isomorphisme.
Les matrices élémentaires forment une base de cet espace vectoriel , qui est donc de dimension $n.p$.

4.3.3 Transposition de matrices

Définition 224 (Transposée d'une matrice) *Etant donnée une matrice M on appelle* **matrice transposée** *de M la matrice N avec $N_{i,j} = M_{j,i}$. Si M est de type (n,p), alors N est de type (p,n).*
On note $N = {}^t M$.

Proposition 225 • *L'application $M \mapsto {}^t M$ est un isomorphisme entre $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ en tant que $\mathbb{K}$-espaces vectoriels .*
• ${}^t(A \times B) = {}^t B \times {}^t A$
• $Mat_{B'^*,B^*}({}^t f) = {}^t Mat_{B,B'}(f)$

4.3.4 Le cas des matrices carrées : la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 226 *On appelle* **matrice carrée** *une matrice de type (n,n) pour un certain n. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.*
On appelle **matrice d'un endormophisme** *f associée à une base B la matrice $Mat_{B,B'}(f)$; on la note aussi $Mat_B(f)$.*
On appelle **diagonale** *d'une matrice carrée M de type (n,n) le vecteur $(M_{1,1}, ..., M_{i,i}, ..., M_{n,n})$.*
On appelle **trace** *d'une matrice carrée M la somme $\sum_{i\in[1,n]} M_{i,i}$. On la note $tr(M)$. L'application $M \to tr(M)$ est une application linéaire.*
On appelle **matrice unité d'ordre** *n la matrice M avec $M_{i,j} = \delta_{i,j}$. C'est la matrice de l'endomorphisme identité.*
On appelle **matrice scalaire** *une matrice égale à $\lambda.I$ avec λ un scalaire et I une matrice unité.*
On appelle **matrice diagonale associée à un n-uple** *m la matrice M de type (n,n) définie par $M_{i,i} = m_i$ et $M_{i,j} = 0$ si $i \neq j$. On note $M = diag(m)$.*
Une matrice est dite **symétrique** *si elle est égale à sa transposée.*
Une matrice M est dite **antisymétrique** *si elle est égale à l'opposée de sa transposée, c'est à dire si ${}^tM = -M$.*
Une matrice carrée est dite **triangulaire supérieure** *si $j < i \to M_{i,j} = 0$*
On note $\mathcal{T}_n^s$ l'ensemble des matrices carrées triangulaires supérieures d'ordre n.
Une matrice carrée est dite **triangulaire inférieure** *si $j > i \to M_{i,j} = 0$*
On note $\mathcal{T}_n^i$ l'ensemble des matrices carrées triangulaires inférieures d'ordre n.

Proposition 227 • *$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre, isomorphe à la $\mathbb{K}$-algèbre des endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ (ou de E, pour tout E espace vectoriel de dimension n).*
• *Si M est inversible, alors sa transposée aussi et $({}^tM)^{-1} = {}^t(M^{-1})$.*
• *$tr(AB) = tr(BA)$ (que A et B soient carrées ou non, pourvu que le produit soit carré)*
• *Une matrice est scalaire si et seulement si c'est la matrice associée à un endomorphisme de la forme $x \mapsto \lambda.x$.*
• *L'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
• *L'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; si $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2, ils sont supplémentaires ; ils sont alors de dimensions respectives $\frac{n.(n+1)}{2}$ et $\frac{n.(n-1)}{2}$, engendrés respectivement par les $E_{i,j} + E_{j,i}$ pour $i \leq j$ et par les $E_{i,j} - E_{j,i}$ pour $i < j$. Toute matrice carrée M s'écrit $A + S$, avec A antisymétrique et S antisymétriques, avec $A = \frac{1}{2}M - {}^tM$ et $S = \frac{1}{2}M + {}^tM$*
• *Le produit de deux matrices symétriques est symétrique si et seulement si les deux matrices commutent.*
• *L'ensemble des matrices triangulaires supérieures est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimension $n.(n+1)/2$.*
• *L'ensemble des matrices triangulaires inférieures est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimension $n.(n+1)/2$.*

• *L'ensemble des matrices triangulaires inférieures est isomorphe à l'ensemble des matrices triangulaires supérieures*
• *Les éléments inversibles de l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) sont les matrices triangulaires dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls ; ils forment un sous-groupe multiplicatif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
• *Etant donnée une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle* **commutant de** *A le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(K)$ des matrices commutant avec A.*
• *Etant donnée A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit $A^0 = I$ avec I la matrice*

Démonstration : Seul le dernier point pose difficulté. Il nécéssitera le théorème de Cayley-Hamilton, qui montre que $A^n \in Vect(A^0, ..., A^{n-1})$. La suite est claire.□

4.3.5 Changement de bases

Soit E espace vectoriel de dimension n, et (e_i) et (f_j) des bases de E.

Définition 228 *On appelle* **matrice de passage** *de la base (e_i) à la base (f_j) la matrice P de type (n, n) définie par $P_{i,j} = e_i^*(f_j)$; on la note $P_{(e_i),(f_j)}$. Il s'agit en fait de la matrice $Mat_{(f_j),(e_i)}(I)$.*

Proposition 229 • *Le produit de la matrice de passage de B à B' par la matrice de passage de B' à B'' est la matrice de passage de B à B''.*
• $P_{B,B'}^{-1} = P_{B',B}$
• *Etant donné X le vecteur des coordonnées de x dans une base B, les coordonnées de x dans la base B' sont données par X' avec $X' = P_{B',B}X$.*
• $Mat_{B',C'}(f) = P_{C',C}.Mat_{B,C}(f).P_{B,B'}$
• *Dans le cas d'un endomorphisme* $Mat_{B'}(f) = P_{B',B}.Mat_B(f).P_{B,B'}$

⚠ La matrice de passage de B à B' donne les coordonnées dans B en fonction des coordonnées dans B' et pas le contraire... La terminologie vaut ce qu'elle vaut ! On peut le retenir en considérant que la matrice de passage de la base B à la base B' est la matrice dans B de l'endomorphisme dont l'image de B est B'.

4.3.6 Groupe linéaire et groupe spécial linéaire

Voir **??**.

4.3.7 Groupe orthogonal réel et groupe spécial orthogonal réel

Voir **??**.

4.3.8 Rang d'une matrice

Définition 230 (Matrice associée à une famille finie de vecteurs) *Etant donnée une famille de vecteurs $(x_1, ..., x_p)$ d'un espace vectoriel de dimension finie n et une base $(v_1, ..., v_n)$ de E, on appelle* **matrice associée à la famille des x_i et à la base des v_i** *la matrice M définie par $M_{i,j} = v_i^*(x_j)$.*
On appelle **rang d'une matrice** *M le rang de la famille de ses vecteurs colonnes. On le note $rg(M)$.*
Une matrice N extraite de M, avec N carrée inversible d'ordre le rang de M, est appelée **matrice principale** *de M.*

Proposition 231 • *Le rang d'une matrice associée à un système de vecteurs et à une base est indépendant de cette base.*
• $rg(Mat_{B,B'}(f)) = rg(f)$
• $rg({}^tM) = rg(M) \leq min(n, p)$*, avec M de type (n, p).*
• $rg(M) = n \iff M$ *surjective*
• $rg(M) = p \iff M$ *injective*
• $rg(M.M') \leq min(rg(M), rg(M'))$

Démonstration : Refaire cette preuve facile réveillera les neurones consacrés à l'algèbre linéaire chez ceux pour qui tout cela est un peu oublié...□

Proposition 232 *Le rang d'une matrice M non nulle est égal à n maximal tel qu'il existe une matrice extraite inversible de type (n, n) de M.*

Démonstration : • Il est clair que le rang de M est supérieur au rang de toute matrice extraite inversible (considérer une combinaison linéaire nulle des vecteurs correspondants de M).
• Etant donné r le rang de M il existe une famille libre de r vecteurs parmi la famille des vecteurs colonnes de M.
On peut alors considérer la transposée de cette matrice ; son rang est le même, et donc on peut se restreindre au même nombre de colonnes.□

4.3.9 Matrices équivalentes, matrices semblables

⊡ **Matrices équivalentes**

Définition 233 (Matrices équivalentes) *Deux matrices A et B de même type (n, p) sont dites* **équivalentes** *si il existe P et Q des matrices inversibles de types respectifs (p, p) et (n, n) telles que*

$$B = Q.A.P$$

Quelques propriétés immédiates :

Proposition 234 • *Il s'agit d'une relation d'équivalence.*
• *Deux matrices de même type sont équivalentes si et seulement si elles représentent un même morphisme dans des bases différentes.*
• *Deux matrices de même type sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.*

⚠ Dans la deuxième propriété, il faut bien voir qu'il faut changer éventuellement à la fois la base de départ et la base d'arrivée.

⊡ **Matrices semblables**

Définition 235 (Matrices semblables) *Deux matrices carrées A et B de même type sont dites semblables s'il existe une matrice P telle que*

$$A = P.B.P^{-1}$$

Proposition 236 • *Il s'agit d'une relation d'équivalence*
• *Deux matrices sont semblables si elles représentent un même endomorphisme dans deux bases différentes*
• *Deux matrices semblables ont même rang*
• *Deux matrices semblables ont même trace*

Démonstration : Facile pour les trois premiers points ; pour le quatrième il suffit de se rappeller que la trace de AB est égale à la trace de BA.□

⚠ Cette fois-ci, contrairement au cas des matrices équivalentes, deux matrices de même rang ne sont pas nécéssairement semblables.

 La deuxième caractérisation fait appel à un endomorphisme et pas une application linéaire quelconque ; la base de départ est la même que celle d'arrivée.

4.3.10 Cofacteurs

Définition 237 (Mineur et cofacteur) *Le déterminant de la matrice M à laquelle on ôte la j-ième colonne et la i-ième ligne est appelé* **mineur** (i,j) **de** M*. On le note généralement $\Delta_{i,j}$.*
Le déterminant de la matrice M à laquelle on ôte la j-ième colonne pour la remplacer par le i-ième vecteur de la base est appelé **cofacteur** (i,j) *de M. On le note généralement $\gamma_{i,j}(M)$. On la note généralement $com(M)$.*
La matrice γ ainsi définie est appelée **comatrice** *de M.*
La matrice ${}^t\gamma$ est appelée **matrice complémentaire** *de M. On la note généralement $\tilde{M}$.*

Pour y voir plus clair, le mineur (i,j) de M est :

$$\begin{vmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} & \dots & M_{1,j-1} & M_{1,j+1} & \dots & M_{1,n} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} & \dots & M_{2,j-1} & M_{2,j+1} & \dots & M_{2,n} \\ M_{3,1} & M_{3,2} & M_{3,3} & \dots & M_{3,j-1} & M_{3,j+1} & \dots & M_{3,n} \\ M_{4,1} & M_{4,2} & M_{4,3} & \dots & M_{4,j-1} & M_{4,j+1} & \dots & M_{4,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{i-1,1} & M_{i-1,2} & M_{i-1,3} & \dots & M_{i-1,j-1} & M_{i-1,j+1} & \dots & M_{i-1,n} \\ M_{i,1} & M_{i,2} & M_{i,3} & \dots & M_{i,j-1} & M_{i,j+1} & \dots & M_{i,n} \\ M_{i-1,1} & M_{i-1,2} & M_{i-1,3} & \dots & M_{i-1,j-1} & M_{i-1,j+1} & \dots & M_{i-1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{n,1} & M_{n,2} & M_{n,3} & \dots & M_{n,j-1} & M_{n,j+1} & \dots & M_{n,n} \end{vmatrix}$$

et le cofacteur (i,j) de M est :

$$\begin{vmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} & \dots & M_{1,j-1} & 0 & M_{1,j+1} & \dots & M_{1,n} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} & \dots & M_{2,j-1} & 0 & M_{2,j+1} & \dots & M_{2,n} \\ M_{3,1} & M_{3,2} & M_{3,3} & \dots & M_{3,j-1} & 0 & M_{3,j+1} & \dots & M_{3,n} \\ M_{4,1} & M_{4,2} & M_{4,3} & \dots & M_{4,j-1} & 0 & M_{4,j+1} & \dots & M_{4,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{i-1,1} & M_{i-1,2} & M_{i-1,3} & \dots & M_{i-1,j-1} & 0 & M_{i-1,j+1} & \dots & M_{i-1,n} \\ M_{i,1} & M_{i,2} & M_{i,3} & \dots & M_{i,j-1} & 1 & M_{i,j+1} & \dots & M_{i,n} \\ M_{i-1,1} & M_{i-1,2} & M_{i-1,3} & \dots & M_{i-1,j-1} & 0 & M_{i-1,j+1} & \dots & M_{i-1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{n,1} & M_{n,2} & M_{n,3} & \dots & M_{n,j-1} & 0 & M_{n,j+1} & \dots & M_{n,n} \end{vmatrix}$$

qui est d'ailleurs égal à

$$\begin{vmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} & \dots & M_{1,j-1} & 0 & M_{1,j+1} & \dots & M_{1,n} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} & \dots & M_{2,j-1} & 0 & M_{2,j+1} & \dots & M_{2,n} \\ M_{3,1} & M_{3,2} & M_{3,3} & \dots & M_{3,j-1} & 0 & M_{3,j+1} & \dots & M_{3,n} \\ M_{4,1} & M_{4,2} & M_{4,3} & \dots & M_{4,j-1} & 0 & M_{4,j+1} & \dots & M_{4,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{i-1,1} & M_{i-1,2} & M_{i-1,3} & \dots & M_{i-1,j-1} & 0 & M_{i-1,j+1} & \dots & M_{i-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ M_{i-1,1} & M_{i-1,2} & M_{i-1,3} & \dots & M_{i-1,j-1} & 0 & M_{i-1,j+1} & \dots & M_{i-1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{n,1} & M_{n,2} & M_{n,3} & \dots & M_{n,j-1} & 0 & M_{n,j+1} & \dots & M_{n,n} \end{vmatrix}$$

Proposition 238

$$\gamma_{i,j} = (-1)^{i+j}.\Delta_{i,j}$$

Proposition 239 *La comatrice de la transposée de M est la transposée de la comatrice de M.*

Il est nécéssaire pour la suite d'avoir lu la partie 2.3.

Théorème 240 *Si $\tilde{M}$ désigne la matrice complémentaire*

$$\tilde{M}.M = det\ M.Id$$

et

$$M.\tilde{M} = det\ M.Id$$

en particulier, si M est inversible, $M^{-1} = \frac{1}{det\ M}\tilde{M}$.

Démonstration : Considérons le terme (i,j) de la matrice $\tilde{M}.M$. Il s'agit de $\sum_{k=1..n} \gamma_{k,i}.M_{k,j}$.
Considérons le terme (i,j) de la matrice $det\ M.Id$.
Il s'agit de $\delta_{i,j}.det\ M$.

On cherche donc à montrer que $\delta_{i,j}.det\ M = \sum_{k=1..n} \gamma_{k,i}.M_{k,j}$.

On distingue deux cas :
• $i \neq j$
On considère alors la matrice M, sur laquelle on remplace la colonne i par la colonne j (on ne les permute pas, on supprime la colonne i, et on copie la colonne j à la place). Le déterminant de la matrice obtenue est nul, puisqu'on a deux fois la même colonne.

On développe par rapport à la colonne i. On obtient

$$\sum_{k=1..n} M_{k,j}.\gamma_{k,i} = 0$$

et donc le résultat dans ce cas est bien montré.
• $i = j$
Dans ce cas on considère le développement de M par rapport à la i-ième colonne et on obtient

$$det\ M = \sum_{k=1..n} \gamma_{k,i}.M_{k,i} = \sum_{k=1..n} \gamma_{k,i}.M_{k,j}$$

d'où le résultat souhaité.
Le second résultat se déduit du premier en considérant la transposée de chacun des deux produits.□

4.4 Opérations sur les lignes et les colonnes

On trouvera des manipulations proches de celles décrites ici dans la partie sur les déterminants2.3. La proposition **??** illustre aussi des opérations sur les lignes et les colonnes.

FLEMMARD -> determinants -> resol syst. lineaires

Définition 241 *On appelle* **système d'équations linéaires** *une équation de la forme $MX = Y$, où M (matrice) et Y (vecteur) sont donnés et où X est l'inconnue.*
Les **opérations sur les lignes et les colonnes** *d'une matrice ou d'un système linéaire sont par définition :*
• *l'addition d'une ligne (resp. colonne) i à une ligne (resp. colonne) $j \neq i$*
• *la multiplication d'une ligne (resp. colonne) i par un scalaire $\lambda \neq 0$*
• *la permutation de deux lignes (resp. colonnes) i et $j \neq i$*
Ces opérations seront notées respectivement :
• $L_i \leftarrow L_i + L_j$ *(resp.* $C_i \leftarrow C_i + C_j$*)*
• $L_i \leftarrow L_i$ *(resp.* $C_i \leftarrow C_i$*)*
• $L_i \leftrightarrow L_j$ *(resp.* $C_i \leftrightarrow C_j$*)*
On pourra éventuellement ajouter à une ligne (resp. une colonne) une autre ligne (resp. colonne) multipliée par un scalaire λ ; cela se notera $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ (resp. $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$).

Exemples :
• Sur un système :
Avant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Après $L_1 \leftarrow L_1 + 2\ L_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

• Sur une matrice Avant :

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}$$

Après $C_1 \leftrightarrow C_2$

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{matrix}$$

Proposition 242 *Les opérations sur les lignes correspondent à des multiplications à droite par des matrices inversibles ; les opérations sur les colonnes correspondent à des multiplications à gauche par des matrices inversibles. L'inverse d'une opération sur les lignes (resp. les colonnes) est une opération sur les lignes (resp. les colonnes).*

Démonstration :

Proposition 243 • *Le déterminant d'une matrice n'est pas modifié en ajoutant à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes.*
• *Multiplier une ligne par λ multiplie le déterminant par λ.*
• *Permuter des lignes multiplie le déterminant par -1.*
Les mêmes résultats sont valables pour les colonnes.

Démonstration : Cela découle immédiatement des propriétés du déterminant, et du fait que le déterminant d'une matrice est égal au déterminant de sa transposée. Ceux qui ont besoin de rappels peuvent consulter la partie 2.3.□

Théorème 244 (Formules de Cramer) *Considérons le système d'équations linéaire $MX = Y$, avec M de type (n, n) :*

$$M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \dots & M_{1,n} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \dots & M_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{n,1} & M_{n,2} & \dots & M_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$Y = (y_1, ..., y_p)$$

On suppose en outre que M est inversible.
Alors X est solution, avec

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \dots & M_{1,i-1} & Y_1 & M_{1,i+1} & \dots & M_{1,n} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \dots & M_{2,i-1} & Y_2 & M_{2,i+1} & \dots & M_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{n,1} & M_{n,2} & \dots & M_{n,i-1} & Y_n & M_{n,i+1} & \dots & M_{n,n} \end{vmatrix}}{det\ M}$$

Démonstration : La solution X est clairement unique, car par inversibilité de M $X = M^{-1}Y$.

On a alors $Y = \sum_k X_k C_k$ avec C_k la k-ième colonne de M.

Donc, quel que soit i, on a alors $det\ {M_k}^{(i)} = \sum X_k det\ {M'_k}^{(i)}$

avec

$$ {M_k}^{(i)} = \begin{vmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \dots & M_{1,i-1} & Y_1 & M_{1,i+1} & \dots & M_{1,n} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \dots & M_{2,i-1} & Y_2 & M_{2,i+1} & \dots & M_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{n,1} & M_{n,2} & \dots & M_{n,i-1} & Y_n & M_{n,i+1} & \dots & M_{n,n} \end{vmatrix} $$

et

$$ {M'_k}^{(i)} = \begin{vmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \dots & M_{1,i-1} & M_{1,k} & M_{1,i+1} & \dots & M_{1,n} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \dots & M_{2,i-1} & M_{2,k} & M_{2,i+1} & \dots & M_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{n,1} & M_{n,2} & \dots & M_{n,i-1} & M_{n,k} & M_{n,i+1} & \dots & M_{n,n} \end{vmatrix} $$

On en déduit donc, en supprimant de la somme $\sum X_k C_k$ les termes nuls, $X_i det\ M = {M'_i}^{(i)}$, ce qui est précisément le résultat désiré.□

Théorème 245 (Méthode du pivôt de Gauss) *La* **méthode de Gauss** *consiste à :*
1) permuter les lignes pour avoir un coefficient non nul en haut à gauche de la matrice ; ce coefficient est appelé **pivôt**
2) soustraire la première ligne multipliée par un coefficient adéquat à chacune des autres lignes de manière à avoir des zéros sur toute la première colonne en dehors du premier coefficient
3) Procéder de même sur la matrice extraite, simplement dépourvue de sa première ligne et sa première colonne.
Le point $1)$ *pourra toujours être réalisé si on trouve toujours un coefficient non nul à échanger ; pour peu que la matrice soit inversible, cette condition sera toujours vérifiée. Si elle ne l'est pas, on peut travailler sur la matrice extraite par suppression de la première colonne.*
En réitérant cette méthode, on arrive à obtenir une matrice triangulaire supérieure. En fait la matrice obtenue est de la forme illustrée sur la figure 4.1, du moins après permutation des colonnes.

La matrice ainsi obtenue est donc beaucoup plus maniable : le calcul du déterminant (si la matrice est carré) se résume à la multiplication des éléments diagonaux, la résolution de systèmes linéaires est plus aisée (il convient de noter pour cela que les opérations sur les colonnes sont de simples permutations sur les inconnues), le calcul du rang est immédiat (nombre d'éléments avant le dernier élément non nul de la dernière colonne).

Afin de minimiser les pertes de précision d'un calcul numérique, il est préférable de choisir un pivôt grand en valeur absolue.

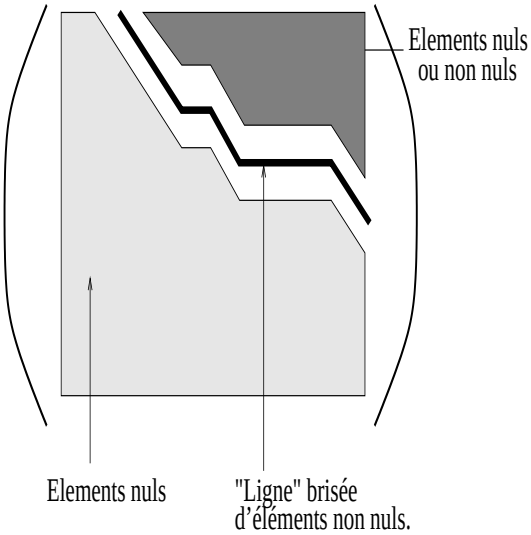

FIG. 4.1 – Matrice obtenue après pivôt de Gauss. La "ligne brisée" évoquée comporte soit des sauts à droite, soit des sauts en diagonale en bas à droite. Le premier élément de la ligne brisée se trouve quelque part sur la première ligne (éventuellement en haut à gauche).

La méthode du **pivôt total** consiste à chercher le pivôt non pas seulement sur la colonne en cours, mais d'éventuellement permuter les colonnes pour avoir un pivôt plus grand. Par opposition au pivôt total, la méthode ci-dessus est dite **pivôt partiel**.

Théorème 246 (Décomposition $A = LU$) *Etant donnée une matrice A supposée inversible, on définit $a_k = |(A_{i,j})_{i,j \leq k}|$, déterminant de la matrice obtenue en se restreignant aux k premières lignes et k premières colonnes.*
On appelle **décomposition** *$A = LU$ un produit du type $A = LU$ avec L matrice triangulaire inférieure ne comportant que des 1 sur la diagonale, U matrice triangulaire supérieure, Alors il existe une décomposition $A = LU$ si et seulement si les a_k sont non nuls pour tout k dans $[1, n]$.*

Démonstration : Il suffit d'utiliser la méthode de Gauss, en considérant les matrices correspondant aux opérations sur les lignes et les colonnes. C'est-à-dire que l'on obtient un produit $\pi_{i=1}^{n} M_{n-i} A = U$, avec M_i la matrice correspondant à l'opération sur les lignes et les colonnes effectué à la i-ième étape. Mais l'inverse d'une opération sur les lignes ou les colonnes est une opération sur les lignes ou les colonnes (facile à trouver) ; donc on peut aussi écrire $A = \pi_{i=1}^{n} N_i U$, avec N_i l'inverse de M_i. Le produit des N_i est bien de la forme désirée, triangulaire supérieure à diagonale unité, comme on s'en convaincra en considérant la stabilité de l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à diagonale unité par multiplication par les matrices des opérations sur les

lignes et les colonnes.

Proposition 247 *Si A est inversible, il existe une matrice de permutation P telle que $PA = LU$.*

Démonstration : Si a_k est nul, il existe nécéssairement une permutation de lignes qui arrange ça, sinon A ne pourrait pas être de rang plein - il suffit donc de multiplier les différentes permutations de lignes nécéssaires pour obtenir une matrice vérifiant les conditions demandées.

Théorème 248 (Décomposition de Cholesky) *On appelle* **décomposition de Cholesky** *ou* **décomposition** $A = {}^t RR$*, un produit de la forme $A = {}^t RR$, avec R triangulaire inférieure inversible.*
A admet une décomposition de Cholesky si et seulement si A est symétrique définie positive.

Démonstration : On pourra consulter [7] pour cette preuve.□

4.5 Matrices par blocs

Les méthodes expliquées ci-dessous dans le cas de quatre blocs, se généralisent naturellement au cas d'un nombre quelconque de blocs.

4.5.1 Produit par blocs

Etant données les matrices A, B, C, D, A', B', C' et D', avec

$$largeur(A) = largeur(C) = hauteur(A') = hauteur(B')$$
$$largeur(B) = largeur(D) = hauteur(C') = hauteur(D')$$

on considère les matrices M et M' définies comme suit :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$
$$M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$$

Alors

$$M.M' = \begin{pmatrix} A.A' + B.C' & A.B' + B.D' \\ C.A' + D.C' & C.B' + D.D' \end{pmatrix}$$

4.5.2 Inverse par blocs

Si $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$, avec A et B inversibles, alors M est inversible et $M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}.C.B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$.

4.5.3 Déterminant par blocs

Si $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$, alors $det\ M = det\ det\ A.det\ B$.

4.6 Exercices sur les matrices

Exercice 249 *Une forme linéaire f sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $f(XY) = f(YX)$ est proportionnelle à l'application $M \mapsto tr(M)$.*

Démonstration : Il suffit de considérer X et Y des matrices élémentaires.□

Exercice 250 *Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si elle est scalaire.*

Démonstration : Simplement vérifier qu'une telle matrice commute avec les matrices élémentaires.□

4.7 Zoologie sur les matrices et leurs déterminants

Définition 251 (Matrice circulante) *On appelle* **matrice circulante associé au n-uple** $(x_1, ..., x_n)$ *la matrice M définie par $M_{i,j} = x_{j-i}$ (modulo n) , c'est à dire*

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_n & x_1 & x_2 & \ddots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_n & x_1 & \ddots & x_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_1 \end{pmatrix}$$

Proposition 252 *L'ensemble des matrices circulantes de type (n, n) est engendré par la matrice suivante :*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Démonstration : Il suffit de voir que la matrice circulante associée à $(x_1, ..., x_n)$ est la matrice

$$x_1.M^0 + x_2.M^1 + ... + x^n.M^{n-1}$$

et le résultat est acquis.□

4.8 Zoologie de la dualité en dimension finie

4.8.1 Polynômes de Lagrange

On considère l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à une indéterminée et de degré au plus n. Soit a_0, ... , a_n des réels deux à deux distincts. On définit $n + 1$ formes linéaires sur E par $f_i(P) = P(a_i)$.

Proposition 253 *Les polynômes de Lagrange f_i forment une base de E.*

Démonstration : Puisque la dimension de E est égale à la dimension de E^*, il suffit de voir que la famille est de rang $n + 1$, ce qui est vérifié si et seulement si l'espace vectoriel dual est de dimension 0. Supposons qu'un certain polynôme P appartienne à cet orthogonal, alors il s'annule en a_0, ... ,a_n ; donc il est nul, puisqu'il est de degré au plus n.□

Proposition 254 *Les polynômes de lagrange (f_i) sont la base duale des P_i, avec*

$$P_i(x) = \Pi_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

Démonstration : Facile, il suffit de vérifier que $P_i(a_j) = \delta_{i,j}$.□

Corollaire 255 (Interpolation de Lagrange) *On en déduit notamment que tout polynôme de degré n s'écrit comme combinaison linéaire des P_i, les coefficients étant donnés par les f_i. C'est-à-dire que tout P de degré $\leq n$ s'écrit*

$$P = \sum_{i=1}^{n} f_i(P) P_i$$

Un exemple d'utilisation Maple :

Exemple Maple

$> \ interp([0,1,2,3],[exp(0),exp(1),exp(2),exp(3)],x);$

$$\frac{1}{6}e^3x^3-\frac{1}{2}e^3x^2+\frac{1}{3}e^3x-\frac{1}{2}e^2x^3+2e^2x^2-\frac{3}{2}e^2x+\frac{1}{2}ex^3-\frac{5}{2}ex^2+3ex-\frac{1}{6}x^3+x^2-\frac{11}{6}x+1$$

Il est intéressant de tracer ensuite la courbe exponentielle et les graphes des interpolations à différents ordres superposées.

4.8.2 Définition d'un sous-espace vectoriel par une famille d'équations

Proposition 256 *Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p, E espace vectoriel de dimension finie n. Alors il existe $n-p$ formes linéaires linéairement indépendantes f_i telles que $F=\{x/\forall i\ f_i(x)=0\}$ c'est à dire que F s'exprime comme intersection de $n-p$ hyperplans. Il est en outre impossible de définir F comme intersection de moins de $n-p$ hyperplans.*

Démonstration : Pour voir qu'une telle famille existe, il suffit de considérer une base de F et sa base duale. Pour vérifier qu'on ne peut faire moins, il suffit de considérer que pour tout G sous-espace vectoriel de E et tout H hyperplan de E on a $dim\ (G\cap H)\geq dim\ G-1$ (par la formule $dimG+dimH=dim(G+H)+dim(G\cap H)$)□

4.9 Approximation de fonctions holomorphes par des fractions rationnelles

Lemme 257 *Soit K un compact de $\mathbb{C}$, inclus dans un ouvert Ω. Alors il existe $\Gamma_1,\Gamma_2,...,\Gamma_n$ des segments orientés dans $\Omega\setminus K$ tels que pour toute fonction holomorphe f sur Ω et pour tout k dans K*

$$f(z)=\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{2i\Pi}\int_{\Gamma_l}\frac{f(t)}{t-z}dt$$

Démonstration :

Lemme 258 (Intuitif pour les topologistes dans l'âme !) *Il existe $\eta>0$ tel que la distance entre un point k de K à un point du complémentaire de Ω soit toujours $>\eta$.*

Démonstration :

• En effet sinon on pourrait construire une suite de points $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de K à distance $\leq 1/n$ de $X \setminus K$.

• On pourrait alors extraire une suite convergente (par le théorème **??**, puisque $\mathbb{C}$ est muni d'une topologie métrique !), et le point limite serait à une distance 0 du fermé complémentaire de Ω, et serait donc dans K sans être dans Ω ; ce qui est contradictoire.□

• On construit alors une grille recouvrant le compact K, avec un maillage inférieur à $\eta/2$, comme indiqué sur la figure 4.2.

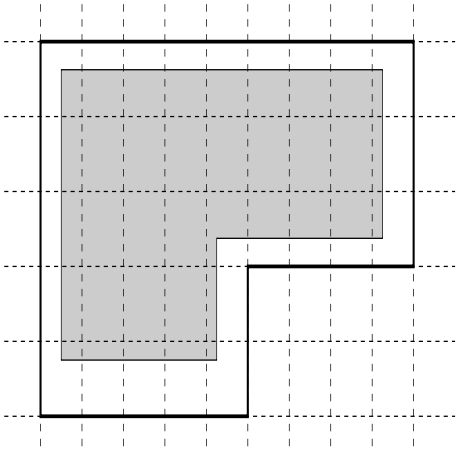

FIG. 4.2 – Un maillage.

• On considère alors les contours γ_1, ... , γ_p, orientés positivement, des carrés $C_1, ..., C_{p/4}$ intersectant K.

• On conserve alors seulement les segments des contours qui ne sont parcourus qu'une fois ; les autres étant parcourus deux fois, une fois dans chaque sens.

• On note ces segments orientés Γ_1, ... , Γ_n.

• On se donne alors f holomorphe sur Ω, et z à l'intérieur de l'un des carrés du maillage, $z \in K$. La fonction g qui à t appartenant à la réunion des γ_l associe $\frac{f(t)-f(z)}{t-z}$ est continue.

• On calcule alors

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{2i\Pi} \int_{\Gamma_l} \frac{g(t)}{t-z} dt$$

• Cette somme est égale à

$$\sum_{l=1}^{p} \frac{1}{2i\Pi} \int_{\gamma_l} \frac{g(t)}{t-z} dt$$

• Par le lemme **??**, étendu au cas d'un carré, on en déduit que la somme est nulle.

• Donc

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{2i\Pi} \int_{\Gamma_l} \frac{f(t)}{t-z} dt$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{2i\Pi} \int_{\Gamma_l} \frac{f(z)}{t-z} dt$$

$$= f(z) \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{2i\Pi} \int_{\Gamma_l} \frac{1}{t-z} dt$$
$$= f(z)$$

• Il ne reste qu'à prolonger par continuité pour avoir le résultat souhaité.□

Théorème 259 (Runge, version faible, lemme pour la version forte) *Soit K un compact de $\mathbb{C}$, inclus dans un ouvert Ω.*
Soit Z une partie de $\mathbb{C}$ contenant au moins un point dans chaque composante connexe de $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus K$.
Alors l'ensemble des fractions rationnelles dont les pôles sont inclus dans Z est dense dans l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω, pour la topologie de la convergence uniforme sur K.

Démonstration :

• Soit FR l'ensemble des fractions rationnelles dont les zéros sont inclus dans Z.

• D'après le corollaire **??**, il suffit de montrer que toute forme linéaire continue nulle sur toutes les fractions rationnelles de FR est nulle sur toute application holomorphe sur Ω.

• D'après le théorème de représentation de Riesz, il nous suffit donc de montrer qu'étant donnée une mesure de Borel complexe μ sur K telle que l'intégrale pour μ sur K de tout élément de FR soit nulle, l'intégrale sur K pour μ de f holomorphe est nulle.

• Soit donc une telle mesure complexe μ, et f holomorphe sur Ω.

• Définissons, pour $t \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus K$,

$$h(t) = \int_K \frac{d\mu(k)}{k-t} \tag{4.1}$$

• h est holomorphe, au vu de la proposition **??**.

• Soit z dans Z et n'appartenant pas à K ; notons V_z la composante connexe de $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus K$ contenant z. On va montrer que h est nulle sur cette composante connexe ; pour cela, par le théorème **??**, il sera suffisant de montrer que h est nulle sur un voisinage de z.

- Supposons tout d'abord $z = \infty$. L'objectif est donc de montrer que pour t assez grand en module, $h(t) = 0$.

Ecrivons, pour k dans K et t quelconque,

$$\frac{k-t}{=} - \frac{1}{k} \frac{1}{1-k/t} = -\sum_{l=0}^{\infty} \frac{k^n}{t^{n+1}}$$

La convergence étant uniforme en k pour t suffisamment grand, on peut alors intervertir l'intégrale et la somme dans l'équation 4.1 et on obtient bien $h(t) = 0$.

- Supposons maintenant que $z \neq \infty$

Ecrivons, pour k dans K et t quelconque,

$$\frac{1}{k-t} = \frac{1}{(k-z)-(t-z)} = \frac{1}{k-z} \frac{1}{1-\frac{t-z}{k-z}}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(t-z)^l}{(k-z)^{l+1}})$$

La convergence étant uniforme en k pour t suffisamment proche de z, on peut alors intervertir l'intégrale et la somme dans l'équation 4.1 et on obtient bien $h(t) = 0$.

• On applique alors le lemme 257, pour pouvoir exprimer f comme une intégrale sur un contour hors de K :

$$\int_K f d\mu = \int_K \frac{1}{2i\Pi} \sum_l \int_{\Gamma_l} \frac{f(t)}{t-k} dt \; d\mu(k)$$

Et par Fubini **??**,

$$= \frac{1}{2i\Pi} \sum_l \int_{\Gamma_l} f(t) \int_K \frac{1}{t-k} d\mu(k) \; dt$$

$$= -\frac{1}{2i\Pi} \sum_l \int_{\Gamma_l} f(t)h(t)dt$$

$$= 0$$

D'où le résultat tant attendu !□

On peut facilement passer à la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

En outre, le cas où K est simplement connexe (i.e. son complémentaire a une seule composante connexe) donne lieu à un corollaire important.

Corollaire 260 (Corollaire important) • *Si f est une fonction holomorphe définie sur un ouvert Ω, si Z est un ensemble contenant au moins un point dans chaque composante connexe de $\hat{C} \setminus \Omega$, alors f est dans l'adhérence de l'ensemble des fractions rationelles à pôles dans Z pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.*
• *Si f est une fonction holomorphe définie sur un ouvert simplement connexe Ω, alors il existe une suite de polynômes convergeant uniformément vers f sur tout compact.*

Démonstration :

• On définit les K_n comme dans le lemme **??**, et on définit F_n comme étant une fraction rationnelle tel que $|f(z) - F_n(z)| \leq 1/n$ pour z dans K_n.

• Dans le deuxième cas, on peut simplement imposer $Z = \{\infty\}$, et on obtient bien une suite de polynômes.□

4.10 Endomorphismes semi-simples

Définition 261 *Un endomorphisme f est dit* **semi-simple** *si tout sous-espace vectoriel stable par f a un supplémentaire stable par f.*

Théorème 262 *On se place en dimension finie.*
On suppose u semi-simple ; on note μ_u le polynôme caractéristique de u.
$\mu_u = \Pi_{i=1}^{p} P_i^{n_i}$ avec les P_i irréductibles et premiers 2 à 2.
$n_i \geq 1$.
On va montrer qu'en fait $n_i = 1$.
En outre on montrera que réciproquement si tous les n_i sont égaux à 1, alors u est semi-simple.

Démonstration : $E = \oplus_{i=1}^{p} E_i$ avec $E_i = KerP_i(u)^{n_i}$

On va montrer que pour tout i $n_i = 1$.
Par l'absurde $n_1 \geq 2$. $KerP_1(u)$ admet un supplémentaire u-stable. Donc $KerP_1(u) \oplus F = E$ avec F u-stable.

$$F = \oplus_{i=1}^{p} (E_i \cap F)$$

donc

$$\begin{array}{rccc} E = & \underbrace{KerP_1(u) \oplus (E_1 \cap F)}_{\bigcap} & \oplus & \oplus_{i=2}^{p} E_i \cap F \\ & & & \bigcap \\ E = & E_1 & \oplus & \oplus_{i=2}^{p} E_i \end{array}$$

Les inclusions sont en fait des égalités puisque la dimension est finie. On considère $F' = E_1 \cap F$. $E_1 = KerP_1(u) \oplus F'$; si $F' = \{0\}$ alors $P_1.\Pi_{i=2}^{p} P_i^{n_i}$ serait dans l'idéal annulateur. Impossible car $n_1 \geq 2$, donc $F' \neq \{0\}$.

On a donc : $P_1^{n_1}(u_{|F'}) = 0$
Soit $x \in E_1 \setminus KerP_1^{n_1-1}(u)$
$x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in KerP_1(u)$ et $x_2 \in F'$.

$$P_1^{n_1-1}(u)(x) = \underbrace{P_1^{n_1-1}(u)(x_1)}_{0 \text{ car } n_1 \geq 2} + P_1^{n_1-1}(u)(x_2)$$

Donc $P_1^{n_1-1}(u)(x_2) \neq 0$ donc $P_1^{n_1-1}(u_{|F'}) \neq 0$.
donc (car P_1 est irréductible) $\mu_{u_{|F'}} = P_1^{n_1}$.

Donc $P_1(u_{|F'})$ est nilpotent, donc pas injectif, or $KerP_1(u) \cap F' = \{0\}$ d'où une contradiction.

Réciproquement :
On suppose $\mu_u = \Pi_{i=1}^{p} P_i$

Alors $E = \oplus_{i=1}^{p} E_i$ avec $E_i = Ker\ P_i(u)$

F stable $\rightarrow F = \oplus_{i=1}^{p}(F \cap E_i)$

il suffit de trouver un supplémentaire stable dans E_i de $F \cap E_i$. Or $\mu_{u_{|E_i}} = P_i$ donc on est ramené au cas ou μ_u est irréductible.

Soit alors F non réduit à 0 et différent de E, stable par u.
Soit $x \in E \setminus F$. $\{Q \in \mathbb{K}[X] | Q(u)(x) = 0\}$ est un idéal non nul engendré par P unitaire différent de 1. P divise μ_u donc $P = \mu_u$ parce que μ_u est irréductible.

Soit m le degré de μ_u. $(x, u(x), ..., u^{m-1}(x))$ est une base de $G = Vect_{i\in\mathbb{N}} u^i(x)$.
$x \notin F$ donc $F \cap G \neq G$, donc $dim\ F \cap G < m$.

Si $F \cap G \neq \{0\}$ alors $\mu_{u_{|F\cap G}} | \mu_u$ donc $\mu_{u_{|F\cap G}} = \mu_u$.

Or $deg\mu_{u_{|F\cap G}} \leq$ (par C.H.) $dim F \cap G < m = deg\mu$, d'où contradiction, donc $F \cap G = \{0\}$. On a donc $F \oplus G$ avec G stable, $G \neq \{0\}$. Si $F + G \neq E$ on recommence ; en un nombre fini d'étapes on conclut.□

En résumé :
Pour montrer qu'un endomorphisme semi-simple admet pour polynôme simple un produit de polynômes irréductibles :
• On considère le polynôme minimal, avec ses facteurs P_i et leurs exposants n_i.
• On suppose $n_1 \geq 2$.
• On considère un supplémentaire F de $Ker\ P_1(u)$ u-stable.
• On considère $E_i = Ker\ P_i^{n_i}(u)$, et on note que F est la somme directe des intersections de F avec les E_i.
• On considère $F' = E_1 \cap F$; on montre que F' n'est pas réduit à 0.
• On considère x dans $E_1 \setminus Ker\ P_1^{n_1-1}(u)$
• On décompose x sur $Ker\ P_1(u)$ et F' ; on en déduit que $P_1^{n_1-1}(u_{|F'}) \neq 0$
• On sait alors que $\mu_{u_{|F'}} = P_1^{n_1}$
• $P_1(u_{|F'})$ est injectif, mais pourtant nilpotent, d'où contradiction.

Pour montrer l'existence d'un supplémentaire stable pour tout sous-espace stable à partir d'un endomorphisme ayant un produit de polynômes irréductibles distincts pour polynôme minimal :
• On se ramène à un polynôme minimal irréductible en considérant les restrictions aux E_i.
• On considère un espace stable F, et un élément x or de cet espace.
• On considère le polynôme qui engendre l'ensemble des polynômes Q tels que $Q(u)(x) = 0$; ce polynome divise le polynome minimal de μ et lui est donc égal puisque ce dernier est irréductible.
• On considère alors G l'espace engendré par les images successives de x par des puissances de u ; cet espace est engendré par les m premiers éléments avec m le degré de μ.
• On en déduit que $F \cap G$ est de dim $< m$.
• On considère alors le polynôme caractéristique de u restreint à $F \cap G$; si ce dernier espace est non nul, alors ce polynôme est égal à μ_u, or son degré est plus petit que m

par application de Cayley-Hamilton, donc la somme de F et G est directe. Il ne reste qu'à récurer pour avoir un supplémentaire de F.

Chapitre 5

Réduction des endomorphismes

Il est nécéssaire avant d'étudier cette partie d'avoir pris connaissance de la partie 1et de la partie 4.

La réduction d'un endomorphisme va constituer dans le cas général en la recherche des éléments propres de cet endomorphisme (définition à venir) et dans le cas de la dimension finie en la recherche d'une base dans laquelle cet endomorphisme est représenté par une matrice de forme agréable (voir plus loin).

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

5.1 Le cas général

Définition 263 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E ; c'est-à-dire $f \in L(E)$. On se donne P un polynôme appartenant à $\mathbb{K}[X]$; $P = \sum_i p_i.X^i$.*
Alors :
• *On dit que F, sous-espace vectoriel de E, est* **stable par** *f si et seulement si $f(F) \subset F$*
• *Si il existe n tel que $Ker\ f_n = Ker\ f_{n+1}$, alors le n minimal vérifiant cette propriété est appelé* **indice de** *f.*
• *On note $P(f)$ l'endomorphisme qui à x associe $\sum_i p_i.f^i(x)$.*
• *On note $\mathbb{K}[f]$ l'ensemble des $Q(f)$ pour $Q \in \mathbb{K}[X]$; c'est une algèbre commutative (sous-algèbre de l'algèbre des endomorphismes $L(E)$)*
• *On appelle* **idéal annulateur de** *f l'ensemble des $Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $Q(f) = 0$ (c'est un idéal, les matheux sont pas encore assez vicieux pour nous faire cette mauvaise blague). On le note $\mathcal{I}(f)$. $\mathbb{K}[X]$ étant principal, si $\mathcal{I}(f)$ est non réduit à $\{0\}$, il est engendré par un polynôme unitaire que l'on appellera* **polynôme minimal de** *f et que l'on notera P_f.*
• *On appelle* **valeur propre** *de f un scalaire λ tel que $f - \lambda.I$ ne soit pas injectif ; dans ce cas $E_f(\lambda) = Ker\ f - \lambda.I$ est appelé* **sous-espace propre** *associé à la valeur propre λ.*
• *On appelle* **spectre de** *f l'ensemble des valeurs propres de f. On le note $Sp(f)$.*
• *On appelle* **vecteur propre de** *f associé à la valeur propre λ un élément non nul du sous-espace propre associé à la valeur propre λ.*
• *On appelle* **valeur propre de** *M avec M une matrice carrée de type (n, n) une valeur propre d'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M.*
• *On appelle* **sous-espace propre de** *M* **associé à** *λ avec M une matrice carrée de type (n, n) l'espace propre de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M pour λ valeur propre de M.*
• *On appelle* **spectre de** *M avec M une matrice carrée de type (n, n) l'ensemble des valeurs propres de M.*

 En dimension infinie un endomorphisme n'a pas nécéssairement un indice

Proposition 264 • *Avec P et Q deux polynômes, $PQ(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$*
• *Si deux endomorphismes commutent, alors le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre.*
• *La suite F_n définie par $F_n = Ker\ f^n$ est croissante*
• *Si f a un indice fini n, alors pour tout i supérieur à n, on a $F_{i+1} = F_i$*
• *Soit P et Q deux polynômes, alors $Ker\ P(f) \cap Ker\ Q(f) = Ker\ ((P \wedge Q)(f))$*
• *Soit P et Q deux polynômes premiers entre eux (i.e. de pgcd 1), alors $Ker\ (PQ)(f) = Ker\ P(f) \oplus Ker\ Q(f)$.*
• *Soit $P_1, ..., P_p$ des polynômes premiers deux à deux tels que $\Pi P_i(f) = 0$, alors $E = \oplus\ Ker\ P_i(f)$.*
Les trois derniers • ont valeur de théorèmes ; on les regroupe souvent sous l'appelation **lemme des noyaux**.

Cela sert un peu partout, dans les résultats de réduction ; citons par exemple la partie sur les suites récurrentes linéaires, 5.3.2, ou le théorème de diagonalisation 272.

Démonstration : Les quatre premiers • sont évidents.
Le 5ème • se montre grâce à la propriété de Bezout.
Pour le 6ème • , la somme est directe en vertu du • précédent ; et les deux inclusions s'obtiennent par Bezout et par le premier • .
Le dernier • est facile à déduire du 6ème. □

Proposition 265 (Pratique de la réduction (sans hypothèse de dimension finie))
• *une somme finie de sous-espaces propres distincts est directe*
• *une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre*
• *si f et g sont deux endomorphismes qui commutent, alors les sous-espaces propres de f sont stables par g*
• $\forall(\lambda, P) \in Sp(f) \times \mathbb{K}[X] \rightarrow P(\lambda) \in Sp(P(f))$
• *Si $P(f) = 0$, alors $\lambda \in Sp(f) \rightarrow P(\lambda) = 0$*
• *Si $f \in GL(E)$, alors $Sp(u^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda} / \lambda \in Sp(u)\}$*

5.2 Le cas de la dimension finie

Dans le cas de la dimension finie, la réduction d'un endomorphisme va consister en la recherche d'une base dans laquelle l'endomorphisme est diagonale, ou, à défaut, triangulaire.

On a vu ci-dessus que pour décomposer un endomorphisme il fallait trouver ses sous-espaces propres et ses valeurs propres. Cela est très lié au polynômes annulateurs de l'endomorphisme ; mais dans le cas général, il y a assez peu de choses à dire. Nous allons voir que la dimension finie est beaucoup plus pratique.

Voyons tout d'abord une liste de propriétés élémentaires très utiles pour la suite :

Proposition 266 • *En dimension finie, tout endomorphisme a un indice, inférieur ou égal à la dimension.*
• *En dimension finie, l'indice est aussi le plus petit n tel que $Im\ f^n = Im\ f^{n+1}$*
• *En dimension finie, avec n l'indice de f, $E = Ker\ f^n \oplus Im\ f^n$*
• *En dimension finie, tout endomorphisme admet un idéal annulateur non réduit à 0, et donc admet un polynôme minimal.*
• *Si F est un sous-espace vectoriel de E, si $(e_1, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_n)$ est une base de E avec $(e_1, ..., e_p)$ une base de F, alors F est stable par f si et seulement si la matrice de f dans la base $(e_1, ..., e_n)$ est de la forme suivante*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

avec A une matrice de type (p, p), B une matrice de type $(p, n-p)$, D une matrice de type $(n-p, n-p)$.
• *Si F_1, F_2, ... et F_p sont des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \oplus F_i$, alors les F_i sont stables par f si et seulement si la matrice de f dans une base constituée d'une base de F_1, suivie d'une base de F_2, ..., suivie d'une base de F_p, est de la forme*

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & M_{p-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{p-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_p \end{pmatrix}$$

avec M_i de type $(dim\ F_i, dim\ F_i)$.

On va maintenant introduire quelques définitions intéressantes dans le cadre de la dimension finie.

Définition 267 (Définitions dans le cadre de la réduction en dimension finie)
• *On appelle* **polynôme caractéristique d'une matrice carrée** *M le polynôme $det(X.I - M)$.*
• *Le polynôme caractéristique de la matrice d'un endomorphisme en dimension finie (le polynôme caractéristique n'est défini que dans ce cadre là) est indépendant de la base choisie ; on l'appelle* **polynôme caractéristique de cet endomorphisme**.
On note χ_M le polynôme caractéristique de la matrice M et χ_f le polynôme caractéristique de l'endomorphisme f.

Voyons maintenant quelques propriétés fondamentales de ces notions, toujours dans le cadre de la réduction en dimension finie ; la preuve, très simple, n'est pas don-

née.

Proposition 268 • *Le polynôme caractéristique d'une matrice M est un polynôme (preuve en considérant la définition première du déterminant).*
• *Le polynôme caractéristique d'une matrice M de type (n, n) est de degré n, de coefficient dominant 1 (preuve là aussi en considérant la définition du déterminant, et en cherchant l'unique permutation qui donne le terme de degré n dans le polynôme caractéristique). Le second coefficient est $-tr\ M$.*
• *Le polynôme caractéristique d'une matrice M est le polynôme caractéristique de toute matrice N semblable à M.*
• *L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme en dimension finie est égal à l'ensemble des 0 de son polynôme caractéristique.*
• *Le polynôme caractéristique de M est égal au polynôme caractéristique de ${}^tM$.*
• *E $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F sous-espace vectoriel de E, f endomorphisme de E, F stable par f, alors $\chi_{f_{|F}}|\chi_f$*
• *Dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie ≥ 1, tout endomorphisme admet au moins une valeur propre.*
• *Le polynôme caractéristique d'une matrice M de type $(2, 2)$ est $X \mapsto X^2 - tr\ M.X + det\ M$*
• *Le polynôme caractéristique d'une matrice M de type $(3, 3)$ est $X \mapsto X^3 - tr\ M.X^2 - tr\ com(M).X - det\ M$*
• *Le polynôme caractéristique d'une matrice M triangulaire de type (n, n) est $\Pi_{i=1}^{n}(X - M_{i,i})$*

Définition 269 *On appelle* **ordre** *d'une valeur propre d'un endomorphisme en dimension finie le degré de multiplicité de cette valeur propre comme racine du polynôme caractéristique.*
On appelle **sous-espace caractéristique** *associé à la valeur propre λ de l'endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie le sous-espace vectoriel $Ker\ (f - \lambda.I)^m$ avec m l'ordre de multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique de f.*
Un endomorphisme en dimension finie est dit **diagonalisable** *si il existe une base dans laquelle cet endomorphisme se représente par une matrice diagonale.*
Une matrice en dimension finie est dite **diagonalisable** *si elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire si elle représente un endomorphisme diagonalisable.*
Un endomorphisme en dimension finie est dit **trigonalisable** *si il existe une base dans laquelle cet endomorphisme se représente par une matrice triangulaire.*
Une matrice en dimension finie est dite **trigonalisable** *si elle est semblable à une matrice triangulaire, c'est-à-dire si elle représente un endomorphisme trigonalisable.*

 Toute matrice triangulaire supérieure est semblable à une certaine matrice tri-

angulaire inférieure et toute matrice triangulaire inférieure est semblable à une certaine matrice triangulaire supérieure, comme on s'en convaincra simplement en changeant l'ordre des éléments d'une base ; ainsi lorsqu'un endomorphisme est trigonalisable, on pourra en considérer indifféremment une représentation triangulaire supérieure ou inférieure.

Notons que tout sous-espace caractéristique de f, endomorphisme en dimension finie, est stable par f.

Passons maintenant à quelques "gros" résultats de réduction en dimension finie.

Théorème 270 *Un endomorphisme f de E $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie est diagonalisable si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*
- *E est somme directe des sous-espaces propres*
- *il existe une base de E formée de vecteurs propres de f*
- *χ_f est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et la dimension de tout sous-espace propre est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée.*

Démonstration : Les deux premiers • sont évident.

Le troisième est plus intéressant :

- la condition est suffisante, car la somme des sous-espaces propres est toujours directe, et la somme des dimensions des sous-espaces propres est bien la dimension de l'espace, donc l'espace est bien somme directe des sous-espaces propres.

- la condition est nécéssaire ; on le voit de manière évidente en considérant une matrice diagonale pour laquelle la matrice de f est diagonale.□

Corollaire 271 *Si χ_f est scindé à racines simples, alors f est diagonalisable.*

Démonstration : Si chaque valeur propre est d'ordre 1, forcément l'espace propre associé est de dimension 1 ; donc ce corollaire découle immédiatement du théorème précédent.□

On va voir un renforcement de ce corollaire ci-dessous.

Théorème 272 *Un endomorphisme f de E $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie est diagonalisable si et seulement si il existe P polynôme scindé à racines simples tel que $P(f) = 0$.*

Démonstration : • Si il existe un tel P, alors E est la somme directe des $Ker\ f - \lambda.I$ pour λ dans l'ensemble des racines de P (voir le lemme des noyaux, proposition 264). Donc f est diagonalisable, clairement.

• Si f est diagonalisable, alors le polynôme caractéristique est scindé et la dimension de chaque espace propre est l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée comme racine de ce polynôme (d'après le théorème précédent).

On peut alors écrire $\chi_F = \Pi(X - x_i)^{r_i}$ avec les x_i distincts deux à deux ; considérons $P = \Pi(X - x_i)$. P est scindé à racines simples. Il reste à voir que $P(f) = 0$.

E est la somme directe des $Ker\ f - x_i.I$. Soit x appartenant à $Ker\ f - x_{i_0}.I$; on a $f(x) = x_{i_0}.x$. $P(f)(x) = \Pi_{i \neq i_0}(y \mapsto f(y) - x_i.y) \circ (y \mapsto f(y) - x_{i_0}.y)^{r_{i_0}-1}\ (f(x) - x_i.x) = 0$. Donc $P(f)$ est nul sur des sous-espace vectoriel dont la somme est E ; donc $P(f)$ est nul.□

Finalement, voici la méthodologie de la diagonalisation :

• On se donne f, endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

• On détermine le polynôme caractéristique de f

• Si χ_F n'est pas scindé, alors on ne peut pas diagonaliser

• Si χ_F est scindé, pour chaque valeur propre λ, on cherche si $E_f(\lambda) = Ker\ (f - \lambda.I)$ est de dimension l'ordre de λ

• Si oui, on obtient une base dans laquelle l'endomorphisme est diagonal en réunissant des bases des sous-espaces propres

• Dans le cas contraire, l'endomorphisme n'est pas diagonalisable ; on essaie alors de trigonaliser (voir plus loin).

On peut ajouter quelques remarques permettant de simplifier la détermination de la diagonalisabilité d'une matrice :

• une matrice M est diagonalisable si pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ $M + \lambda.I$ est diagonalisable ; si $P^{-1}.(M + \lambda.I).P = D$, alors $P^{-1}.M.P = D + \lambda.I$

• La restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sous-espace stable est diagonalisable (en effet la diagonalisabilité d'un endomorphisme équivaut à l'existence d'un polynôme scindé à racines simples annulant cet endomorphisme)

Maintenant le théorème fondamental de la trigonalisation :

Théorème 273 *Un endomorphisme en dimension finie est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.*

Démonstration : Il est évident que si l'endomorphisme est trigonalisable, alors son polynôme caractéristique est scindé. La réciproque est donc le problème intéressant. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

On procède par récurrence sur la dimension de l'espace. En dimension 1 le résultat est clair ; on suppose maintenant le résultat vrai jusqu'en dimension $n-1$, et on suppose E de dimension n.

Le polynôme caractéristique de f étant scindé, il possède une racine, disons λ. Soit e_1 un vecteur propre associé à λ, et complétons de manière à avoir $(e_1, ..., e_n)$ une base de E.

La matrice de f dans cette base est une matrice (n, n) de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & * & \dots & * \\ 0 & M_{1,1} & \dots & M_{1,n-1} \\ 0 & M_{2,1} & \dots & M_{2,n-1} \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & M_{n-1,1} & \dots & M_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

La matrice M a un polynôme caractéristique scindé, comme on s'en convaincra facilement en considérant la définition du déterminant.

Par la propriété de récurrence, M est donc trigonalisable ; $PMP{-}1 = T$, avec T matrice triangulaire supérieure.

Alors on considère le produit suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_{1,1} & \cdots & P_{1,n-1} \\ 0 & P_{2,1} & \cdots & P_{2,n-1} \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & P_{n-1,1} & \cdots & P_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & M_{1,1} & \cdots & M_{1,n-1} \\ 0 & M_{2,1} & \cdots & M_{2,n-1} \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & M_{n-1,1} & \cdots & M_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_{1,1}^{-1} & \cdots & P_{1,n-1}^{-1} \\ 0 & P_{2,1}^{-1} & \cdots & P_{2,n-1}^{-1} \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & P_{n-1,1}^{-1} & \cdots & P_{n-1,n-1}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & T_{1,1} & \cdots & T_{1,n-1} \\ 0 & T_{2,1} & \cdots & T_{2,n-1} \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & T_{n-1,1} & \cdots & T_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

(les $*$ représentant des scalaires quelconques)

Le résultat est ainsi établi.□

Corollaire 274 *Toute matrice à coefficients complexes est trigonalisable dans* $M_n(\mathbb{K})$.

Démonstration : Rappelons juste le théorème de D'Alembert-Gauss : un polynôme à coefficients complexes est scindé sur $\mathbb{C}$.□

Ce dernier théorème va permettre de démontrer un théorème important, le théorème de Cayley-Hamilton :

Théorème 275 (Cayley-Hamilton) *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors $\chi_f(f) = 0$.*

Démonstration :

• On montre tout d'abord le résultat pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Ensuite, puisque le polynôme caractéristique d'une matrice à coefficients réels est le même que l'on la considère comme matrice réelle ou complexe, et puisqu'un endomorphisme est nul si et seulement si sa matrice associée est nulle, le résultat sera aussi valable pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

• χ_f est un polynôme scindé, puisque l'on travaille dans $\mathbb{C}$; donc on peut trigonaliser f.

• On se donnne $(e_1, ..., e_n)$ une base dans laquelle f est représenté par une matrice triangulaire supérieure.

• On note $\chi_f = \Pi_{i=1}^{n}(X - x_i)$, avec x_i le i-ième terme sur la diagonale de la matrice de f dans la base $(e_1, ..., e_n)$.

• On note $P_i = \Pi_{j=1}^{n}(X - x_i)$.

• On considère la propriété $P(i)$ définie par $P(i) \iff \forall j \in [1, i] P_i(e_j) = 0$; on montre facilement par récurrence qu'elle est vraie pour tout i compris entre 1 et n.□

Proposition 276 *Si le polynôme caractéristique est scindé, la dimension d'un sous-espace caractéristique est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée.*

Démonstration :

Pendant l'ensemble de la preuve, on note I_p la matrice identité à p lignes et p colonnes.

• Notons f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, de polynôme caractéristique scindé.

• Soit F sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ de multiplicité m.

• Dans une certaine base, f est représenté par une matrice triangulaire supérieure (théorème 273). Soit M cette matrice :

$$M = \begin{pmatrix} \lambda.Id_m + N & P \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

où N est triangulaire supérieure à diagonale nulle, P quelconque, Q triangulaire supérieure (n'admettant pas λ pour valeur propre).

• Une vérification immédiate révèle alors que $(f - \lambda Id_n)^m$ est représenté par la matrice suivante (N est nilpotente d'indice de nilpotence $< m$) :

$$\begin{pmatrix} 0 & P' \\ 0 & (Q - \lambda.Id_{n-m})^m \end{pmatrix}$$

• On en déduit donc que le rang de $(f - \lambda Id_n)^m$ est $n - m$ (rappelons que λ n'est pas valeur propre de Q).

• On a donc bien $dim\ F = n - (n - m) = m$.□

On peut alors passer au théorème suivant, fournissant une jolie représentation d'un endomorphisme trigonalisable :

Théorème 277 *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n. Alors E est la somme directe des sous-espaces caractéristiques associés à f, et dans une certaine base f a pour matrice*

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & M_l \end{pmatrix}$$

avec M_i une matrice triangulaire supérieure de type (m, m) comportant seulement des λ_i sur la diagonale et avec m l'ordre de λ_i.

Le corollaire qui suit, et la partie 5.3.3 de calcul de l'exponentielle d'un endomorphisme donnent des applications à ce résultat.

Démonstration : Il suffit de considérer les espaces caractéristiques ; leur somme est directe et égal à E (par le théorème de Cayley-Hamilton), ils sont stables par f, on peut donc considérer les restrictions aux différents sous-espaces caractéristiques.

D'où le résultat.□

Corollaire 278 *Si f est un endomorphisme de polynôme caractéristique scindé d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n, alors f s'écrit de manière unique comme somme d'un endomorphisme diagonalisable et d'un endomorphisme nilpotent, qui commutent .*

Démonstration : L'existence de cette écriture est facile ; il suffit de considérer la matrice M donnée par le théorème précédent, et d'écrire $M = D + N$, avec D une matrice diagonale, et N une matrice triangulaire supérieure à diagonale nulle.

L'unicité sera ici admise.□

Voyons maintenant la méthodologie de la trigonalisation ; elle fait suite à celle de la diagonalisation, dans le cas où la diagonalisation est impossible. En fait on ne va pas simplement chercher à trigonaliser ; on va essayer si possible d'obtenir une décomposition comme celle proposée dans le théorème 277.

On se donne un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n.

• On cherche si le polynôme caractéristique est scindé. S'il ne l'est pas, f n'est pas trigonalisable

• On détermine les sous-espaces caractéristiques

• On détermine une base de chacun de ces sous-espaces, dans laquelle la restriction de l'endomorphisme est représentée par une matrice triangulaire supérieure ; cela se fait par récurrence, comme on peut le voir dans la démonstration du théorème 273.

• On prend la réunion de ces bases, et on a une représentation comme souhaitée.

5.3 Applications de la réduction d'un endomorphisme

5.3.1 Application au calcul d'un polynôme d'endomorphisme

On se donne M la matrice de l'endomorphisme f d'un espace vectoriel de dimension finie n. Son polynôme caractéristique est appelé P.

Par le théorème de Cayley-Hamilton

Alors supposons que l'on cherche $Q(f)$, avec Q un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. On détermine alors la division euclidienne $Q = P.A + B$.

$$Q(f) = P(f).A(f) + B(f) = B(f) \text{ car } P(f) = 0$$

Il suffit donc ensuite d'avoir préalablement calculé les M^k pour $k \in [0, n-1]$.

Par diagonalisation

On suppose ici que M est diagonalisable. Si $M = L.D.L^{-1}$, alors $Q(M) = L.Q(D).L^{-1}$; si D est choisie diagonale, $Q(D)$ est donc vite calculée. Cette méthode est efficace seulement si il s'agit de calculer de nombreuses fois des polynômes d'un même endomorphisme ; lorsque l'on change d' endomorphisme à chaque fois, la diagonalisation est trop laborieuse.

5.3.2 Application aux suites récurrentes linéaires

Définition 279 *On considère une suite d'éléments d'un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle définie par récurrence par $u_n = a_0u_{n-p} + a_1u_{n-p+1} + a_2u_{n-p+2} + ... + a_{p-1}u_{n-1}$ (u_i étant donné pour $i < n$). On peut en fait noter $X_n = (u_{n+p-1}, u_{n+p}, ..., u_n)$; alors $X_{n+1} = MX_n$, avec*

$$M = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & ... & ... & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & ... & ... & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & ... & ... & a_{p-2} & a_{p-1} \end{matrix}$$

On suppose a_0 non nul, cas auquel on peut toujours se ramener.
Une telle suite est dit **suite récurrente linéaire**.
Le polynôme caractéristique de M est $P = X^p - a_0 - a_1X - a_2X^2 - ... - a_{p-1}X^{p-1}$. Par définition, ce polynôme est dit **polynôme caractéristique** *de la relation de récurrence linéaire.*

L'espace vectoriel E des suites vérifiant la relation de récurrence donnée est le noyau de $P(f)$, avec f l'application qui à une suite (u_n) associe (u_{n+1}) (ceci découle immédiatement de la définition de P !).

On va faire l'hypothèse que P est scindé, ce qui dans le cas de suites réelles ou complexes est une hypothèse qui n'enlève rien à la généralité, puisqu'on peut toujours supposer la suite complexe. On peut alors appliquer D'Alembert-Gauss pour conclure que P est scindé .

Par le lemme des noyaux (proposition 264), on constate que E est égal à la somme directe des $Ker\,(f-\lambda_i I)^{\nu_i}$ avec les λ_i les racines de P avec pour ordres de multiplicité les ν_i.

On va donc chercher à exprimer les solutions comme combinaisons linéaires d'éléments des $Ker\,(f-\lambda_i I)_i^{\nu}$. Il convient donc de déterminer une base de $Ker\,(f-\lambda I)^{\nu}$.

Pour cela on considère l'opérateur $\mathbb{D}$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$ qui à Q associe $Q \circ (X + 1) - Q$. On identifie $\mathbb{N}$ à $\mathbb{N}.1_{\mathbb{K}}$, de manière évidente. On considère alors Q appartenant à $\mathbb{K}[X]$, de degré $< \nu$; on définit ensuite $u_n = u_n^Q = \lambda^n Q(n)$. L'image de la suite u_n par $f - \lambda I$ est $n \mapsto \lambda^{n+1}\mathbb{D}(Q)$; son image par $(f - \lambda I)^2$ est $n \mapsto \lambda^{n+2}\mathbb{D}^2(Q)$, et ainsi de suite jusqu'à son image par $(f-\lambda I)^{\nu}$ qui est $n \mapsto \lambda^{n+\nu}\mathbb{D}^{\nu}(Q)$. Or on constate immédiatement que $deg\ \mathbb{D}(Q) = deg\ Q - 1$ si Q est de degré ≥ 1, et $\mathbb{D}(Q) = 0$ sinon, et donc vu la limite sur le degré de Q, $(f - \lambda I)^{\nu}(u_n) = 0$.

Donc on obtient des éléments de E en considérant des suites de la forme $n \mapsto \lambda_i^n n^q$, pour $0 \leq q \leq \nu_i$. Il reste à voir si l'on obtient bien une base de E. Si la famille est libre, alors son cardinal fait que l'on a bien une base de E. Il suffit donc de montrer que cette famille est libre.

Il suffit donc de montrer que l'application $Q \mapsto u^Q$ est linéaire et injective. La linéarité est évidente. Supposons maintenant que $u^Q = 0$. Alors $Q(n) = 0$ pour tout n (en effet λ_i est non nul, car nous avons imposé a_0 non nul ; donc Q est nul.

D'où le résultat désiré. Etant donnés les premiers termes u_i pour $i < n$, on peut reconstituer alors la suite en écrivant à priori la suite sous la forme $\sum Q_i(n)\lambda_i^n$ avec

Q_i de degré $< \nu_i$; les coefficients se déduisent par une résolution de système linéaire.

5.3.3 Calcul d'exponentielle de matrice

On suppose donnée une matrice M, de polynôme caractéristique scindé (hypothèse peu restrictive dans la mesure où l'on considère éventuellement la clotûre algébrique).

On cherche à calculer l'exponentielle de M.

M peut être trigonalisée, dans une base constituée d'une réunion de bases d'espaces caractéristiques ; avec P la matrice de passage correspondante, $N = PMP^{-1}$ est donné par la proposition 277 ; une matrice diagonale par blocs, chaque bloc étant somme d'une homothétie et d'un nilpotent.

On a alors $exp(M) = P\, exp(N) P^{-1}$. Le calcul de $exp(N)$ peut se faire par blocs. Il suffit donc d'être capable de calculer $exp(\lambda\, I + Q)$, avec Q nilpotent.

Pour cela il suffit de constater que $exp(\lambda\, I + Q) = e^{\lambda} exp(Q)$ car I et Q commutent, et que

$$exp(Q) = \sum \frac{1}{k!} Q^k = I + Q + \frac{1}{2} Q^2 + ... + \frac{1}{p} Q^p$$

si $Q^{p+1} = 0$; on est ainsi ramené à une somme finie.

Bibliographie

[1] P. BARBE, M. LEDOUX, *Probabilité*, BELIN, 1998.

[2] H. BRÉZIS, *Analyse fonctionnelle*, MASSON, 1983.

[3] H. CARTAN, *Calcul différentiel*, FLEMMARD.

[4] A. CHAMBERT-LOIR, S. FERMIGIER, V. MAILLOT, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 1*, MASSON, 1997.

[5] A. CHAMBERT-LOIR, S. FERMIGIER, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 2*, MASSON, 1995.

[6] A. CHAMBERT-LOIR, S. FERMIGIER, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 3*, MASSON, 1996.

[7] P.G. CIARLET, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, DUNOD, 1998.

[8] F. COMBES *Algèbre et géométrie*, BRÉAL, 1998. <

[9] J.-P. DEMAILLY, *Analyse numérique et équations différentielles*, PRESSES UNIVERSITAIRES DE GRENOBLE, 1996.

[10] W. GIORGI, *Thèmes mathématiques pour l'agrégation*, MASSON, 1998.

[11] A. GRAMAIN, *Intégration*, HERMANN 1988, PARIS.

[12] J.-L. KRIVINE, *Introduction to axiomatic set theory*, D. REIDEL PUBLISHING COMPANY, DORDRECHT-HOLLAND.

[13] S. LANG, *Real analysis*, ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY, 1969.

[14] D. PERRIN, *Cours d'algèbre*, ELLIPSES 1996.

[15] A. POMMELLET, *Cours d'analyse*, ELLIPSES 1994.

[16] W. RUDIN, *Analyse réelle et complexe*, MASSON 1992.

[17] R. SMULLYAN, *Théorie de la récursion pour la métamathématique*, FLEMMARD.

[18] Y.G. SINAI *Probability theory - An introduction course*, SPRINGER TEXTBOOK, 1992.

[19] P. TAUVEL, *Mathématiques générales pour l'agrégation*, MASSON, 1997.

[20] J. VAUTHIER, J.J. PRAT, *Cours d'analyse mathématiques de l'intégration*, MASSON, 1994.

[21] D. WILLIAMS, *Probability with martingales*, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1991.

[22] C. ZUILY, H. QUEFFÉLEC, *Eléments d'analyse pour l'intégration*, MASSON, 1995.