Chapitre 1

Topologie

1.1 Espaces topologiques

1.1.1 Cas le plus général d'espace topologique

Définition 1 (Topologie) *Une* **topologie** $\mathcal{T}$ *sur l'ensemble* X *est une partie* $\mathcal{T} \subset P(X)$ *vérifiant :*
• *L'ensemble vide* $\emptyset$ *et* X *sont dans* $\mathcal{T}$
• $\mathcal{T}$ *est stable par réunions arbitraires*
• $\mathcal{T}$ *est stable par intersections finies*

Un tel couple $(X, \mathcal{T})$ *est appelé espace topologique. Les éléments de* $\mathcal{T}$ *sont appelés les* **ouverts** *de la topologie.*
Une partie de X *est dite* **fermée** *si son complémentaire est ouvert.*

Exemples :
• La topologie discrète sur l'ensemble X est la topologie $\mathcal{T}_d = P(X)$
• La topologie grossière sur l'ensemble X est la topologie $\mathcal{T}_g = \{\emptyset, X\}$
• Sur $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, la topologie usuelle est l'ensemble des U tels que $U \subset \mathbb{N}$ ou $+\infty \in U \wedge \mathbb{N} \setminus U$ est cofini.

On verra aussi d'autres exemples en parties 1.1.2 et 1.2.

Proposition 2 *Si* X *est un espace topologique alors*
• X *et* $\emptyset$ *sont des fermés de* X
• *Une intersection quelconque de fermés est un fermé*
• *Une union finie de fermés est un fermé*

Démonstration : Immédiat, par passage au complémentaire.□

Définition 3 (Séparation par des ouverts) *On dit que la partie A et la partie B sont* **séparées par des ouverts** *s'il existe deux ouverts U et V tels que $A \subset U$ et $B \subset V$ tels que $U \cap V = \emptyset$.*

1.1.2 Espaces métriques et espaces normés

Définition 4 (Métrique) *Une* **métrique** *ou* **distance** *sur l'ensemble X est une application $d : X \times X \to [0, +\infty[$ vérifiant :*
• $d(x, y) = 0 \iff x = y$
• $d(x, y) = d(y, x)$
• $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(propriété dite* **inégalité triangulaire***)*
On dit alors que (X, d) est un **espace métrique**.

Exemples :
• $d_p = (\sum |x_i - y_i|^p)^{1/p}$
• $d_\infty = max|x_i - y_i|$

Propriété :
• $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$

Définition 5 (Boules) *Si x est un point de l'espace métrique X et $r \in [0, +\infty[$, on appelle* **boule ouverte (resp. fermée)** *de centre x et de rayon r, l'ensemble des y tels que $d(x, y) < r$ (resp. $d(x, y) \leq r$).*
On appelle **sphère** *de l'espace métrique X de centre x et de rayon r l'ensemble des y tels que $d(x, y) = r$.*

Proposition 6 *Si X est un espace métrique, la famille de parties de X dont les éléments sont les réunions arbitraires de boules ouvertes est une topologie sur X. Cette topologie est appelée la topologie* **associée** *à la métrique.*
Une partie X d'un espace métrique E est dite **bornée** *si étant donné un point e dans E la distance de x à e pour x dans X est majorée par une certaine constante [a]. Cela équivaut aussi au fait que la distance entre deux points quelconques de X est bornée. C'est à dire que :*
- si pour un point x, $y \mapsto d(x,y)$ est bornée, alors pour tout point x, $y \mapsto d(x,y)$ est bornée.
- si pour tout point x $y \mapsto d(x,y)$ est bornée, alors $(x,y) \mapsto d(x,y)$ est aussi bornée.

[a] La notion est indépendante du point e choisi, grâce à l'inégalité triangulaire.

Démonstration : La vérification est fastidieuse et ne présente pas de difficulté.□

La notion de borné dépend de la métrique et pas de la topologie ! C'est à dire que même si deux métriques sont topologiquement équivalentes (voir définition 9) elles n'ont pas nécessairement les mêmes parties bornées. En fait pour toute métrique d, on peut construire une métrique équivalente d' par $d'(x,y) = ln(1 + \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)})$, telle que toute partie soit bornée.

Propriétés :
• Dans un espace métrique, une partie est fermée si et seulement si elle contient la limite de toute suite convergente à valeurs dans cette partie.
• Une boule ouverte est ouverte, et donc un espace métrique est séparé
• Une boule fermée est fermée
• Une sphère est fermée
• Dans un espace métrique, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers x si et seulement si $d(x_n, x)$ tend vers 0.

Exercice 7 • *La topologie usuelle sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est la topologie associée à la distance $d(x,y) = |x - y|$.*
• *La fonction qui à x et y associe 0 si $x = y$ et 1 sinon est une métrique. Cette métrique est associée à la topologie discrète, pour laquelle toute partie est à la fois un ouvert et un fermé.*
• *Si f est injective de X dans $\mathbb{R}$, alors la fonction qui à x et y associe $|f(x) - f(y)|$ est une distance sur X.*
• *La topologie usuelle sur $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ est définie par la distance $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$, avec $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, $f(+\infty) = 1$ et $f(-\infty) = -1$.*

Définition 8 (Isométrie) *Etant donnés deux espaces métriques E et F, une application f de E dans F est une* **isométrie** *si* $\forall (x,y)\ d_F(f(x),f(y)) = d_E(x,y)$.

Définition 9 (Métrisable) *Une topologie est dite* **métrisable** *si et seulement si il existe une métrique telle que la topologie soit associée à cette métrique.*
Deux métriques d_1 et d_2 sont dites **équivalentes** *si il existe α et β tels que $\alpha d_1 < d_2 < \beta d_1$ [a], avec $\alpha, \beta > 0$.*
Deux métriques sont dites **topologiquement équivalentes** *si elles définissent la même topologie.*

[a]On dit aussi que d_1 et d_2 sont **Lipschitz-équivalentes**.

Soient deux distances d_1 et d_2 sur un espace E ; alors l'identité de (E, d_1) dans (E, d_2) est un homéomorphisme si et seulement si d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes, et elle est lipschitzienne et d'inverse lipschitzien [1] si et seulement si d_1 et d_2 sont équivalentes.

Proposition 10 (Existence de topologie non métrisables) *Il existe des topologies, même séparées, non métrisables.*

Démonstration : Il est clair que toute topologie non séparée n'est pas métrisable.

Considérons, pour avoir un contre-exemple plus intéressant, une topologie séparée non métrisable. Ce contre-exemple fait appel à quelques notions qui seront définies ultérieurement, et peut donc être laissé de côté en première lecture.

Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, muni de la topologie produit.

Supposons que cet espace topologique soit métrisable.

Alors tout point est à base dénombrable de voisinage.

Soit (U_n) une base de voisinages de 0.

Alors pour tout n, U_n contient un voisinage de 0 (la fonction nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) de la forme

$$V_n = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / \forall i \in [1, N_n] |f(x_{n,i})| < \epsilon_n\}$$

On considère alors T l'ensemble des $x_{n,i}$ pour $i \leq N_n$ et $n \in \mathbb{N}$.

Cet ensemble est dénombrable comme union dénombrable d'ensemble finis.

Soit maintenant x dans $\mathbb{R}$ n'appartenant pas à T.

Alors $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / |f(x)| < \epsilon\}$ est un ouvert, qui n'est manifestement inclus dans aucun V_n.

[1]Une application est dite **bilipschitzienne** si elle est lipschitzienne et d'inverse lipschitzien.

Il est à noter que $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$ convient aussi.□

Proposition 11 *Une topologie métrisable est entièrement caractérisée par les propriétés de convergence de suites.*
C'est à dire que si pour deux topologies métrisables, les suites convergentes sont les mêmes et ont mêmes limites, alors ces deux topologies sont égales.

Démonstration : Il suffit de voir que l'on caractérise un fermé F d'un métrique par le fait qu'il contient les limites de toute suite convergente d'éléments de F. Donc les fermés sont caractérisés par les propriétés de convergence de suite, et donc les ouverts aussi par passage au complémentaire.□

Proposition 12 • *Si deux distance d_1 et d_2 sont équivalentes alors d_1 et d_2 définissent la même topologie.*
• *on peut avoir la même topologie sans avoir cette relation.*

Démonstration : Le premier • est facile, le second s'obtient en considérant $d'(x,y) = min(1, d(x,y))$, avec d une distance quelconque non bornée.□
Il est intéressant de noter que même en ajoutant une condition à l'équivalence traduisant que l'on peut se limiter aux "petites" distances, on a un contre-exemple avec par exemple $d_{1/2}$ et d_1 qui définissent la même topologie sans être Lipschitz-équivalentes, même sur les petites distances.
On peut aussi noter que les d_p pour $p \geq 1$ sont Lipchitz-équivalentes entre elles, cela se montre par $d_\infty \leq d_p \leq n^{1/p} d_\infty$

Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni de sa topologie usuelle.

Définition 13 (Norme) *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Une* **norme** *sur E est une application $\| \,.\, \|$ de E dans $[0, +\infty[$ vérifiant :*
• $\| x \| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$
• $\forall x, y \in E$, *on a* $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$
• $\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall x \in E$ *on a* $\| \lambda.x \| = |\lambda| \, \| x \|$
S'il ne manque que la première propriété, on parle de **semi-norme**.
On appelle vecteur unitaire un vecteur x tel que $\| x \| = 1$.
Un espace muni d'une norme est appelé **espace normé** *ou* **espace vectoriel normé**.
Dans un espace normé une série $(\sum x_n)$ est dite **normalement convergente** *si $\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$ converge.*
Enfin une définition nécessitant la notion de continuité (définie ultérieurement) : on appelle **isomorphisme de l'espace vectoriel normé E dans l'espace vectoriel normé F** *une application linéaire continue bijective de réciproque continue (c'est à dire qu'il s'agit d'un morphisme algébrique (i.e. au sens des espaces vectoriels) et d'un homéomorphisme).*

Exemples :
• Sur $\mathbb{R}^n$, les applications suivantes sont des normes :
- $(x_1, ..., x_n) \mapsto \|x\|_\infty = max_{i \in \{1,...,n\}} |x_i|$
- pour p réel ≥ 1, $x \mapsto \|x\|_p = (\sum_{i \in \{1,...,n\}} |x_i|^p)^{1/p}$ • Un peu plus difficile : sur $\mathbb{R}[X]$, les applications suivantes sont des normes :
- $P \mapsto \|P\|_0 = sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$
- $P \mapsto \|P\|_1 = \int_0^1 |P(t)dt$

Propriétés :
• La norme est convexe.

Définition 14 (Distance associée) *Etant donnée une norme on définit une* **distance associée** *par $d(x, y) = \| x - y \|$*

Définition 15 (Normes équivalentes) *Deux normes $\| \,.\, \|_1$ et $\| \,.\, \|_2$ sur un même espace vectoriel sont* **équivalentes** *si il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha. \| x \|_1 < \| x \|_2 < \beta. \| x \|_1$*

Théorème 16 *Deux normes sont équivalentes si et seulement si elles définissent la même topologie.*

Démonstration : L'une des deux implications résulte de 12. L'autre s'obtient facilement, l'une des deux inégalités après l'autre, en constatant qu'une boule de centre 0 et de rayon 1 pour l'une des normes contient une boule pour l'autre norme.$\square$

1.1.3 Notion de voisinage

Définition 17 (Voisinage) *Soit X un espace topologique. Un* **voisinage** *V de $x \in X$ est un ensemble tel qu'il existe un ouvert U avec $x \in U \subset V$.*
On note par $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.

Proposition 18 *Un sous-ensemble d'un espace topologique est ouvert si et seulement si il est un voisinage de chacun de ses points.*

Démonstration :
• Soit un ouvert U, et x dans U. On a $x \in U \subset U$... Donc U est voisinage de x.
• Soit U voisinage de chacun de ses points. A chaque point x associons l'ouvert U_x tel que $x \in U_x \in U$. La réunion des U_x est un ouvert, contient tous les x de U et est incluse dans U ; c'est donc U. Donc U est un ouvert. $\square$

Proposition 19 • *Si $x \in X$, X espace topologique, et $V \subset V'$, et $V \in \mathcal{V}(x)$, alors $V' \in \mathcal{V}(x)$.*
• *pour tout $V, V' \in \mathcal{V}(x)$, alors $V \cap V' \in \mathcal{V}(x)$*

Démonstration : • V contient par définition un ouvert contenant x ; V étant inclus dans V', V' contient ce même ouvert. Donc V' est un voisinage de x.
• V et V' contiennent chacun un ouvert contenant x ; l'intersection de ces deux ouverts est un ouvert, contient x et est inclus dans $V \cap V'$; donc $V \cap V'$ est un voisinage de x. $\square$

1.1.4 Fermeture, intérieur, extérieur, frontière

Définition 20 (Fermeture ou adhérence) *Si $A \subset X$,* **l'adhérence** *(dite aussi* **fermeture***) de A est l'intersection de tous les fermés contenant A, c'est donc le plus petit fermé contenant A. On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.*

Propriété :
A, B parties de X ; alors $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Définition 21 (Point d'accumulation d'une partie) *On appelle* **point d'accumulation d'une partie** *A un point x adhérent à $A \setminus \{x\}$.*
On appelle **ensemble dérivé de** *A l'ensemble des points d'accumulation de A.*

Propriété :
Un ensemble dérivé dans un espace séparé est toujours un fermé.

Lemme 22 *Si A est une partie de l'espace topologique X, on a l'équivalence suivante :*

$$x \in \overline{A} \iff \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset$$

Démonstration : Il suffit de constater les points suivants :
• $y \notin \overline{A}$ si et seulement si on peut trouver un fermé F contenant A et ne contenant pas y.
• On considère le complémentaire de F.□

Définition 23 (Ensemble dense) *Un sous-ensemble de X est* **dense** *dans X si son adhérence est X.*

La densité sera utilisée dans les théorèmes de prolongement, prolongement des identités, prolongement de fonctions uniformément continues (capital par exemple pour le théorème de Plancherel, cité dans la partie 1.1.8 et démontré dans [16]). Le prolongement de fonctions continues servira aussi à construire des solutions maximales d'équations différentielles (voir théorème de Cauchy-Lipschitz **??**). On pourra aussi voir l'exercice ? ? référence selon lequel tout espace métrique complet connexe localement connexe est connexe par arcs.

La densité servira aussi pour prouver le théorème d'Arzéla-Ascoli **??**, le théorème de Moore (voir livre ? ?), l'inégalité de Hardy (voir livre [2]).

De nombreux résultats de densité dans les Banach auront de vastes applications ; il y a déjà toutes les applications du théorème de Baire 190 (théorème de l'application ouverte, théorème du graphe fermé, théorème d'isomorphisme de Banach, que l'on trouvera tous à la suite du théorème de Baire 190). On pourra enfin consulter le théorème de Goldstine, dans le livre ? ?.

Par ailleurs, la séparabilité est par définition liée à la densité, voir la définition 37 et la liste d'applications qui y est donnée.

Enfin, certains résultats de densité seront fondamentaux pour de multiples applications pratique (approximation) : on pourra consulter le chapître **??**. Cela servira par exemple pour la transformée de Fourier - en fait les bases hilbertiennes sont basées sur la densité.

N'oublions pas aussi de petits résultats dus à la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$: le fait que tout ouvert de $\mathbb{R}$ s'exprime comme union dénombrable d'intervalles ouverts.

Proposition 24 *A est dense dans X si et seulement si tout ouvert non vide intersecte A.*

Démonstration : Cela résulte directement du lemme ci-dessus.$\square$

Définition 25 (Intérieur) *L'**intérieur** du sous-ensemble A de l'espace topologique X, noté $Int(A)$, est la réunion de tous les ouverts inclus dans A, c'est donc le plus grand ouvert contenu dans A.*

Propriétés :

• A, B inclus dans X ; alors $Int\ (A \cup B) = Int\ A \cup Int\ B$ et $Int\ (A \cap B) = Int\ A \cap Int\ B$. • Si deux ouverts sont disjoints, alors les intérieurs de leurs adhérences sont disjoints.

• $Int(X \setminus A) = X \setminus \overline{A}$ (ie $Int\ A = X \setminus \bar{(}X \setminus A)$).

Proposition 26 *Le point x est dans $Int(A)$ si et seulement si $A \in \mathcal{V}(x)$*
Le point x est dans $Int(A)$ si et seulement s'il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ avec $V \subset A$

Démonstration : Je ne vous ferai pas l'injure de le démontrer.$\square$

Définition 27 (Extérieur) *L'**extérieur** de A, noté $Ext(A)$, est l'intérieur du complémentaire de A.*

Proposition 28 $Ext(A) = \{x | \exists V \in \mathcal{V}(x) / V \cap A = \emptyset\}$

Démonstration : Evident.$\square$

Définition 29 (Frontière) *La* **frontière** *de A, notée $Fr(A)$ est son adhérence privée de son intérieur.*

Propriété : $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

Proposition 30 *Un ensemble est à la fois ouvert et fermé si et seulement si sa frontière est vide.*

Démonstration :

• Soit A cet ensemble. Comme A est fermé, il est égal à son adhérence, et comme il est ouvert, il est égal à son intérieur, donc sa frontière, égale à son adhérence privée de son intérieur, est vide.

• Réciproquement, si la frontière de A est vide, et s'il est non vide, cela signifie que son intérieur est au moins égal à A, donc qu'il est ouvert. Et si sa frontière est vide, cela signifie que son adhérence ne peut pas être plus grande que lui, donc il est fermé.□

Théorème 31 • $Int(A) = \{x \in X | \exists V \in \mathcal{V}(x), V \cap X \setminus A \ = \emptyset\}$
• $Ext(A) = \{x \in X | \exists V \in \mathcal{V}(x), V \cap A = \emptyset\}$
• $Fr(A) = \{x \in X | \ \nexists V \in \mathcal{V}(x), V \cap A = \emptyset \vee V \cap (X \setminus A) = \emptyset\} = \{x \in X / \forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset \wedge V \cap (X \setminus A) \neq \emptyset\}$
X est réunion disjointe de son intérieur, son extérieur et sa frontière.

Démonstration : Chacune de ces propriétés se démontre en deux lignes, simplement en écrivant bien formellement ce que l'on cherche à démontrer.□

1.1.5 Base d'ouverts et base de voisinages

Définition 32 (Base d'ouverts) *Soit X un espace topologique. Une famille $\mathcal{B}$ d'ouverts de X est une* **base d'ouverts** *si tout ouvert est une réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.*

Proposition 33 *Une famille $\mathcal{B}$ d'ouverts est une base d'ouverts si et seulement si quel que soit l'ouvert U et $x \in U$ il existe $V \in \mathcal{B}$ tel que $x \in V \subset U$.*

Démonstration : Si $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts, alors étant donnés x et U, on considère un élément V de $\mathcal{B}$ qui contient x ; la réciproque se fait en considérant pour un ouvert donné la réunion des V obtenus par la propriété en considérant les différents x.□

Proposition 34 • *Dans un espace métrique, les boules ouvertes de rayon rationnel forment une base d'ouverts*
• *Dans le cas de $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique usuelle, les boules ouvertes de rayon rationnel et à coordonnées toutes rationnelles forment une base dénombrable d'ouverts*
• *Dans $\mathbb{R}$ tout ouvert est en fait une réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints (et réciproquement).*
• *Dans $\mathbb{R}$ un fermé n'est pas nécessairement une réunion dénombrable d'intervalles fermés deux à deux disjoints, et une réunion dénombrable d'intervalles fermés deux à deux disjoints n'est pas nécessairement fermée.*

Démonstration :

• Soit U un ouvert d'un espace métrique, et x dans U ; on montre que U contient une boule de rayon rationnel contenant x. Pour cela on note que U est réunion de boules ouvertes, donc contient au moins une boule ouverte B de rayon r et de centre O contenant x ; on note alors r' la distance de x à O ; toute boule ouverte centrée en x de rayon rationnel inférieur à $r - r'$ convient (on peut aussi choisir de raisonner sur les boules centrées sur O de rayon adéquat...).

• Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et x un point de U. On considère une boule ouverte contenant x et incluse dans U ; soit O son centre et r son rayon. Alors soit r' la distance de x à O, et y un point de coordonnées rationnelles situé à une distance d inférieure à $\frac{r-r'}{3}$ de O. Alors toute boule centrée sur y de rayon rationnel compris entre $r' + \frac{r-r'}{3}$ et $r' + 2.\frac{r-r'}{3}$ convient.

• En plusieurs points :

- Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$; alors étant donné un rationnel de U on considère l'intervalle maximal le contenant. On parcourt ainsi tout U, et on a bien un ensemble dénombrable d'intervalles ouverts.

- Une réunion d'ouverts est toujours un ouvert.

• Deux contre-exemples :

- le cantor K^3 (voir partie 1.6.13) n'est pas une réunion dénombrable d'intervalles fermés disjoints.

- l'ensemble des $1/n$ est une réunion dénombrable d'intervalles fermés disjoints, mais n'est pas fermé. □

Définition 35 (Base dénombrable d'ouverts) *X est à* **base dénombrable d'ouverts** *si on peut trouver une base d'ouverts qui soit dénombrable.*

Proposition 36 *Un espace à base dénombrable d'ouverts contient un ensemble dénombrable dense*

Démonstration : Il suffit de considérer un point par ouvert non vide d'une base dénombrable.□

Définition 37 (Espace séparable) *Un espace est* **séparable** *si il contient un ensemble dénombrable dense.*

Cela sera notamment utile pour définir une métrique sur la boule unité fermée du dual d'un espace séparable (pour la topologie faible). Ceux qui veulent en savoir plus peuvent aller voir la proposition 135.

On note en particulier qu'un ensemble à base dénombrable d'ouverts est séparable (il suffit de prendre un point dans chaque ouvert) ; il s'agit de la proposition précédente. La réciproque est vraie dans le cas des espaces métriques :

Théorème 38 *Un espace métrique est séparable si et seulement s'il admet une base dénombrable d'ouverts.*

Ce résultat permettra de conclure que tout espace métrique compact admet une base dénombrable d'ouverts (voir résultat 137) et d'en déduire que tout espace métrique compact est de cardinal au plus la puissance du continu (voir résultat 135).

Démonstration : La remarque précédente donne l'un des deux sens. Réciproquement supposons que X soit métrique séparable. Soit $\{x_n/n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble dense dénombrable. Alors l'ensemble des boules de centre x_i et de rayon $1/j$ avec $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ est une base dénombrable d'ouverts.$\square$

Définition 39 (Base de voisinages) *Soit $x \in X$, une famille $\mathcal{B}(x)$ de voisinages de x est une* **base de voisinages** *de x si pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$ il existe $V' \in \mathcal{B}(x)$ avec $V' \subset V$.*

Définition 40 *Un espace est* **à base dénombrable de voisinages** *si chacun de ses points admet une base dénombrable de voisinages.*

Exercice 41 *Tout espace métrique est à base dénombrable de voisinages.*

Démonstration : Il suffit de considérer les boules de rayon $1/i$ de centre x pour avoir une base dénombrable de voisinages de x.$\square$

1.1.6 Continuité et limite

Définition 42 (Continuité ponctuelle) *Soit f une application entre espaces topologiques. f est* **continue en** x *si et seulement si quel que soit $V \in \mathcal{V}(f(x))$, l'image réciproque $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x (ie si $\exists U \in \mathcal{V}(X)/f(U) \subset U$).*
f est **continue** *si f est continue en tout point.*

Exemples :
• La distance est continue (en vertu de la propriété $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$).
• La norme est continue (comme composée d'applications continues, puisque $x \mapsto (x,x)$ est continue, et $(x,y) \mapsto d(x,y)$ est continue, avec d la distance associée à la norme.
• La multiplication par un scalaire et l'addition sont continues pour la topologie associée à la norme.

Définition 43 (Semi-continuité) *Une application f de X dans $\mathbb{R}$ est* **semi-continue inférieurement** *si pour tout c on a $f^{-1}(]c, +\infty[)$ ouvert.*
Une application f de X dans $\mathbb{R}$ est **semi-continue supérieurement** *si pour tout c on a $f^{-1}(]-\infty, c[)$ ouvert.*

Proposition 44 • *Une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ est continue si et seulement si elle est à la fois semi-continue inférieurement et semi-continue supérieurement.*
• *La borne sup d'une famille de fonctions semi-continues inférieurement est semi-continue inférieurement.*
• *La fonction caractéristique d'un ouvert (resp. fermé) est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement).*

Théorème 45 (Stabilité de la continuité par composition) *Si f est continue en x et si g est continue en $f(x)$, alors $g \circ f$ est aussi continue en x.*

Démonstration : L'image réciproque d'un voisinage de $g(f(x))$ est un voisinage de $f(x)$, l'image réciproque d'un voisinage de $f(x)$ par f est un voisinage de x, donc l'image réciproque d'un voisinage de $g \circ f(x)$ par $g \circ f$ est un voisinage de x. D'où la continuité de $g \circ f$ en x.$\square$

Corollaire 46 *Si f et g sont continues, alors $g \circ f$ est continue.*

<u>Démonstration :</u> L'image réciproque d'un ouvert par f est un ouvert, l'image réciproque d'un ouvert par g est un ouvert, donc l'image réciproque par $g \circ f$ est un ouvert.$\square$
(on peut aussi simplement utiliser le théorème 48)

Proposition 47 *Soit $\mathcal{B}$ une base de voisinages de $f(x)$.*
f est continue en x si et seulement si quel que soit $V \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \in V(x)$.

<u>Démonstration :</u> Soit un voisinage U de $f(x)$, il contient un certain V appartenant à $\mathcal{B}$. L'image réciproque de V étant un voisinage de x, l'image réciproque de U contient V et est donc aussi un voisinage de x.$\square$

Théorème 48 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
- *f est continue*
- *Pour tout ouvert U, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X.*
- *Pour tout fermé F, $f^{-1}(F)$ est un fermé de X.*
- *Pour tout ouvert $V \in \mathcal{B}$, avec $\mathcal{B}$ une base d'ouverts, $f^{-1}(V)$ est ouvert*
- *Pour tout A, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$*

<u>Démonstration :</u> L'équivalence entre les 4 premières assertions est claire. La cinquième assertion est une conséquence facile de la continuité de F (il suffit de voir qu'elle équivaut à $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ et de rappeler que l'adhérence de A est l'intersection de tous les fermés contenant A). Réciproquement, en supposant la cinquième assertion vraie, on montre facilement que tout fermé F de l'image de f vérifie $f^{-1}(F)$ fermé. Il suffit de voir alors que f est continue de X vers Y si et seulement si elle est continue en tant que restriction de X sur $f(X)$.$\square$

On peut noter alors que si f est une application de X dans Y, alors si X est muni de la topologie discrète (topologie égale à l'ensemble des parties de X) ou si Y est muni de la topologie grossière (topologie limitée à $\{\emptyset, Y\}$) alors f est nécessairement continue.

Définition 49 (Limite) *Soit $f : X \setminus \{x_0\} \to Y$, avec $x_0 \in X$. On dit que y est une* **limite** *de f en x_0, si pour tout voisinage V de y dans Y, la réunion $f^{-1}(V) \cup \{x_0\}$ est un voisinage de x_0.*

Proposition 50 *Les propriétés suivantes sont équivalentes au fait que l soit limite de x_n :*
• pour tout voisinage V de l, il existe un nombre fini de x_n en dehors de V.
• Dans le cas où l'espace est métrique : la distance de x_n à c tend vers 0.

Lemme 51 *f est continue en x_0 si et seulement si $f(x_0)$ est limite de $f_{|X \setminus \{x_0\}}$ en x_0.*

Démonstration : Faisable sans trop de difficultés.□

Définition 52 (Point isolé) *x_0 est* **isolé** *si et seulement si $\{x_0\}$ est ouvert.*
Un espace topologique est dit **discret** *si tous ses éléments sont des points isolés.*

Lemme 53 *Le point x_0 n'est pas isolé si et seulement si $V \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$, pour tout $V \in \mathcal{V}(x_0)$, et encore si et seulement si $x_0 \in \overline{X \setminus \{x_0\}}$.*

Démonstration : Clair.□

Un problème est la non-unicité de la limite, a priori. Nous avons donc besoin de la notion d'espace séparé, que l'on définira un peu plus loin.

Définition 54 (Homéomorphisme) *Un* **homéomorphisme** *est une application bijective continue et de réciproque continue.*

Exercice 55 (Quelques propriétés des homéomorphismes.) *• L'identité est un homéomorphisme.*
• Une composition d'homéomorphisme est un homéomorphisme.
• Sur un espace normé, la translation et l'homothétie de rapport non nul sont des homéomorphismes.
• L'ensemble des homéomorphismes de X vers X est un sous-groupe de l'ensemble des bijections de X vers X.

Démonstration : Rien de difficile dans tout ça ; notons que la réciproque d'une homothétie est une homothétie, et qu'une homothétie est continue parce que les opérations algébriques sont continues (voir proposition 104). □

1.1.7 Espace séparé

Définition 56 (Espace séparé) *Un espace est* **séparé** *si pour toute paire de points* (x, y) *on peut trouver un voisinage de* x *et un voisinage de* y *disjoints.*

Exercice 57 • *Un espace métrique est séparé.*
• *Une topologie discrète est séparée.*

Exercice 58 *Tout ensemble fini d'un espace séparé est fermé.*

__**Démonstration :**__ Dans le cas d'un singleton il est clair que le complémentaire est voisinage de chacun de ses points, donc ouvert, par 18. Le passage à un ensemble fini se voit par les propriétés immédiates des fermés données en 2.□

Théorème 59 *Soit* $f : X \to Y$.
Si x_0 *n'est pas isolé et si* Y *est séparé, alors l'application* f *a au plus une limite en* x_0.

__**Démonstration :**__ On considère les voisinages respectifs de deux limites, et on considère l'intersection de leurs images inverses respectives ; cette intersection est réduite à un singleton ; or c'est un voisinage de x_0.□

Théorème 60 *Soient* f_1 *et* f_2 *deux applications continues ayant même ensemble de départ et même ensemble séparé d'arrivée. Alors* $\{x | f_1(x) = f_2(x)\}$ *est fermé.*

⚠ L'hypothèse de séparation est nécéssaire (de même que dans le théorème suivant, même contre-exemple) ; considérer par exemple f_1 et f_2 deux applications de $\mathbb{R}$ (muni de sa topologie usuelle) dans $\{0, 1\}$ muni de la topologie grossière. f_1 est l'application nulle, f_2 est nulle sauf en 0 ; $f_2(0) = 1$.

__**Démonstration :**__ On montre que l'ensemble complémentaire est ouvert. Pour cela on considère x dans ce complémentaire, et deux voisinages disjoints de $f_1(x)$ et $f_2(x)$; l'intersection des images réciproques de ces voisinages est un voisinage de x qui montre que notre complémentaire est bien un voisinage de x.□

Corollaire 61 *Si f_1 et f_2 coïncident sur un ensemble dense et ont valeurs dans un espace séparé, alors elle coïncident partout.*

Démonstration : Il suffit de se rappeler qu'un fermé est égal à son adhérence, et que l'adhérence d'un ensemble dense est l'espace tout entier.□

Lemme 62 *Si f est continue et injective, et si l'espace d'arrivée est séparé, alors l'espace de départ est aussi séparé.*

Ce lemme servira à montrer le théorème 101

Démonstration : On considère deux points distincts de l'espace de départ, leurs images sont distinctes par l'injectivité, on peut les séparer par deux ouverts, d'images réciproques ouvertes. La suite est triviale. □

1.1.8 Continuité et limite dans les espaces métriques ou normés

Définition 63 (Continuité séquentielle) *f est* **séquentiellement continue en** *x si et seulement si pour toute suite x_n convergeant vers x les $f(x_n)$ convergent vers $f(x)$.*

Théorème 64 *Soit X à base dénombrable de voisinages, alors toute fonction séquentiellement continue est continue.*

Démonstration : On considère une suite de voisinages décroissants (V_n) de x. Soit W un voisinage de $f(x)$. Si $f^{-1}(W)$ n'est pas un voisinage de x, alors on peut trouver $x_n \in V_n \setminus f^{-1}(W)$; x_n tend vers x ; or $f(x_n) \notin W$, et donc $f(x_n)$ ne peut pas tendre vers $f(x)$.□

Corollaire 65 *Si f est séquentiellement continue sur un espace métrique, alors f est continue.*

Démonstration : Il faut simplement considérer l'exercice 41□

Ce corollaire servira notamment pour le théorème **??**.

Proposition 66 (Définition $\epsilon - \delta$ de la continuité) *Soit f application entre espaces métriques ; f est continue en x si pour tout ϵ il existe δ tel que $d(x, x') < \delta \rightarrow d(f(x'), f(x)) < \epsilon$*

Démonstration : Il suffit de remarquer que la famille des boules ouvertes de rayon ϵ et de centre $f(x)$ est une base de voisinages de $f(x)$, et que la famille des boules ouvertes de rayon δ et de centre x est une base de voisinages de x.$\square$

Définition 67 (Continuité uniforme) *Une application f d'un espace métrique dans un autre espace métrique est dite* **uniformément continue** *si, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in X^2$, $d(x, y) < \alpha \rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$.*

La continuité uniforme n'est pas une notion topologique mais une notion métrique ; i.e. deux distances équivalentes ont la même notion de continuité uniforme (que l'on change la distance dans l'espace de départ ou dans l'espace d'arrivée), mais le fait que deux métriques soient associées à la même topologie ne suffit pas pour qu'elles aient la même notion de continuité uniforme.$\square$

La continuité uniforme est une notion très importante ayant de nombreuses applications.

Pour montrer la continuité uniforme, on dispose des outils suivants :
- une fonction Lipschitzienne entre métriques est uniformément continue
- une fonction bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et monotone est uniformément continue
- une fonction continue sur un compact est uniformément continue (théorème de Heine 139, voir le dit théorème pour d'innombrables applications)
- si p et q sont conjugués et si f et g appartiennent à L^p et L^q de $\mathbb{R}^n$ respectivement, alors $f * g$ (convoluée) est uniformément continue.

Une propriété essentielle est le théorème 187.

Définition 68 *On dit qu'une suite f_n d'applications de X dans Y avec Y un espace métrique* **converge uniformément** *vers f si pour tout ϵ positif il existe N tel que pour tout $n \geq N$ et tout x dans X $d(f(x), f_n(x)) < \epsilon$.*

Les applications et des exemples classiques :

Tout d'abord, quelques résultats célèbres de densité pour la topologie de la convergence uniforme : voir le théorème de Runge **??**, le théorème de Stone **??** (avec son corollaire le théorème de Stone-Weierstrass ; voir en particulier les polynômes de Bernstein $B_n(f)(x) = \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ qui convergent uniformément vers f sur $[0,1]$, voir théorème **??**).

Il faut absolument se rappeler la convergence uniforme d'une série entière sur tout disque de rayon strictement inférieur au rayon de convergence.

Quelques résultats célèbres utilisant la convergence uniforme : **??**,**??** (intégration de fonctions réglées), **??** (sur la limite uniforme d'une suite de fonctions holomorphes). Quelques variantes à notre convergence uniforme ci-dessus définie, et d'autres résultats (notamment métrisabilité) : voir définition **??**, et les résultats qui suivent ; voir aussi Ascoli et ses conséquences, **??**.

Il convient enfin de signaler quelques applications de la convergence uniforme aux espaces L^p et à l'intégration :
- théorème de Plancherel : il existe un unique isomorphisme de L^2 dans L^2 appelé transformation de Fourier L^2 notée $f \mapsto \hat{f}$ telle que pour tout f dans $L^1 \cap L^2$ $\hat{f}$ est la transformée de Fourier L^1 de f, $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ (voir par exemple le livre [16])
- théorème de Sard : voir [6].
- Intégration au sens de Riemman : voir partie **??**.

Définition 69 (Applications lipschitzienne) *Une application h est dite* **lipschitzienne** *s'il existe $K \in [0,+\infty[$ tel que*

$$d(h(x),h(x')) \leq K.d(x,x')$$

On dit aussi qu'elle est K-lipschitzienne.
On définit la **constante de Lipschitz** *par*

$$Lip(h) = sup\{\frac{d(h(x),h(x'))}{d(x,x')}|x,x' \in X, x \neq x'\}$$

Proposition 70
• *Les fonctions lipschitziennes sont continues, et même uniformément continues.*
• *Les fonctions C^1 d'un compact de $\mathbb{R}$ dans un espace vectoriel normé sont Lipschitziennes, ainsi que les fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans un espace vectoriel normé à dérivée bornée (voir le théorème* **??***).*

Exemple : la distance $x \mapsto d(x,x_0)$ sur un espace métrique E avec x_0 appartenant à E est 1-lipschitzienne de E dans $\mathbb{R}$. La distance de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ est lipschitzienne, pour toutes les normes usuelles.

Définition 71 (Norme d'une application linéaire) *Si ϕ est une application linéaire entre espaces normés, on définit sa* **norme** $\| \phi \|$ *par*
$\| \phi \| = sup\{\| \phi(x) \| \ / \ \| x \| \leq 1\}$
Cette norme peut a priori être infinie - ce qui signifie donc que l'appellation "norme", bien que classique, est abusive. Il ne s'agit d'une norme qu'en se restreignant à l'ensemble des applications pour lesquelles cette "norme" est finie.

Lemme 72

$$\| \phi \| = sup\{\| \phi(x) \| \ / \ \| x \| = 1\} = sup\{\frac{\| \phi(x) \|}{\| x \|} / x \neq 0\}$$

Démonstration : Il suffit d'avoir la patience de le vérifier...□

Théorème 73 *Une application linéaire entre espaces normés est continue si et seulement si sa norme est $< \infty$. Elle est continue si et seulement si elle est lipschitzienne et son coefficient de Lipschitz est égal à sa norme.*

Démonstration : Si ϕ est continue en zéro, il est clair que pour r suffisamment petit, $\| x \| < r$ implique $\| \phi(x) \| < 1$; on constate alors par linéarité que $\| \phi \| \leq r^{-1}$.

Réciproquement si ϕ a une norme finie, alors ϕ est lipschtzienne $\| \phi(x) - \phi(y) \| = \| \phi(x-y) \| \leq \| \phi \| . \| (x-y) \|$, et $Lip(\phi) \leq \| \phi \|$; en considérant x de norme 1, on constate que $Lip(\phi) = \| \phi \|$; d'où le résultat.□

Exercice 74 (Critère de continuité pour une forme linéaire sur un espace normé) *ϕ fonction de E dans son corps $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ est continue si et seulement si son noyau $\phi^{-1}(0)$ est fermé.*

Démonstration : Si ϕ est continue, il est clair que l'image réciproque d'un singleton est un fermé. Réciproquement, par contraposée, supposons que ϕ n'est pas continue, alors f n'est pas non plus séquentiellement continue (voir le corollaire 65), donc il existe une suite x_n tendant vers 0 telle que $\phi(x_n)$ ne tend pas vers 0. La suite $y_n = \frac{x_n}{\phi(x_n)}$ (définie pour les n tels que $\phi(x_n)$ soit $> \epsilon > 0$ après extraction d'une sous-suite) tend vers 0. On considère alors un certain a tel que $\phi(a) = 1$ (si ϕ est nulle elle est continue), et on constate que la suite $z_n = y_n - a$ tend vers $-a \notin \phi^{-1}(0)$, alors que $z_n \in \phi^{-1}(0)$.□

Définition 75 (Borné) *Soit E un espace normé. Un sous-ensemble $A \subset E$ est dit* **borné** *si $sup\{\| x \| \, |x \in A\} < +\infty$.*
On dit que l'application f est **bornée** *sur B si et seulement si $f(B)$ est borné.*

Exercice 76 *Soit ϕ une application linéaire entre espaces normés. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
- *ϕ est continue*
- *ϕ est continue en 0*
- *ϕ est bornée sur une boule de rayon > 0*
- *ϕ est bornée sur une sphère de rayon > 0*

Démonstration : Ces preuves sont faciles, je me contente de rappeler quelques faits qui permettent de les rédiger proprement.

La topologie est invariante par translation (puisque toute translation est un homéomorphisme), donc la continuité en 0 équivaut à la continuité en un point quelconque.

Le fait que ϕ soit bornée sur une boule équivaut trivialement au fait que ϕ soit bornée sur une sphère (par linéarité).

Si ϕ est bornée sur une boule, par linéarité il est clair qu'elle tend vers 0 en 0.

Enfin si ϕ est continue, on a montré un peu plus tôt que sa norme est finie, ce qui se voit facilement au fait que pour x suffisamment petit, on doit avoir $\phi(x)$ petit, et donc pour $\|x\| < 1$, $\|\phi(x)\| \leq 1/r$. $\square$

1.1.9 Valeur d'adhérence

Définition 77 (Valeur d'adhérence) *Soit $f : X \setminus \{x_0\} \rightarrow Y$, avec X et Y des espaces topologiques ; on dit que $y \in Y$ est une* **valeur d'adhérence** *de f en x_0 si et seulement si pour tout $V_{x_0} \in \mathcal{V}(x_0)$ et tout $V_y \in \mathcal{V}(y)$ on a $V_y \cap f(V_{x_0} \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$.*

Lemme 78 *L'ensemble des valeurs d'adhérence de f en x_0 est donné par l'intersection des $\overline{f(V_{x_0} \setminus \{x_0\})}$, pour V_{x_0} voisinage de x_0 ; en particulier c'est un fermé.*

Démonstration : Soit y une valeur d'adhérence, alors par définition y appartient à l'adhérence de $\overline{f(V \setminus \{x_0\})}$ pour tout V voisinage de x_0. La réciproque, tout aussi simple, est laissée de côté.$\square$

Corollaire 79 *Si x_0 n'est pas isolé, alors les limites sont des valeurs d'adhérence.*

Démonstration : Clair.□

Proposition 80 (Le cas des suites) *Soit x_n une suite dans un espace topologique X.*
• Les limites de suites extraites sont des valeurs d'adhérence
• Si une valeur d'adhérence a une base dénombrable de voisinages, alors c'est la limite d'une suite extraite.

Démonstration :
• l'infini n'est pas isolé pour la topologie usuelle de $\mathbb{N}$. Donc les limites d'une suite sont des valeurs d'adhérence. Et les valeurs d'adhérence d'une suite extraite sont clairement des valeurs d'adhérence de la suite.
• Soit (V_n) une suite de voisinages de l, valeur d'adhérence de x_n ; soit $\phi(1)$ tel que $x_{\phi(1)}$ soit inclus dans V_1, $\phi(2)$ tel que $\phi(2)$ soit inclus dans V_2 et $\phi(1) < \phi(2)$, $\phi(3)$ tel que $\phi(3)$ soit inclus dans V_3 et $\phi(2) < \phi(3)$, et ainsi de suite...□

Corollaire 81 *Dans un espace métrique, les valeurs d'adhérence d'une suite sont exactement les limites des sous-suites extraites.*

⚠ Attention à l'hypothèse métrique ! Dans le cas général, ce n'est pas vrai, voir 1.6.7.

1.2 Construction de topologies

Définition 82 *Etant donné $A \subset X$, on appelle* **topologie induite** *par la topologie de X sur A l'ensemble des intersections d'ouverts de X avec A.*

Il est facile de vérifier qu'il s'agit bien d'une topologie.

Exercice 83 *• Si X est séparé, alors A est séparé pour la topologie induite.*
• A est ouvert (resp. fermé) dans X si et seulement si tout $B \subset A$ est ouvert (resp. fermé) pour la topologie induite si et seulement si B est ouvert (resp. fermé) pour la topologie de X
• Si A est ouvert (resp. fermé) dans X, alors l'intérieur (resp. l'adhérence) de $B \subset A$

est le même dans X et dans A

1.2.1 Topologie quotient

On suppose X muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. On note π la projection canonique de X sur l'ensemble quotient.

Définition 84 (Topologie quotient) *La* **topologie quotient** *est définie comme suit :*
$U \subset X/\mathcal{R}$ est ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est ouvert.

On peut vérifier facilement qu'il s'agit bien d'une topologie.

Proposition 85 *Soit X un espace topologique, et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X. On note Π la projection canonique de X sur $X/\mathcal{R}$.*
Les propriétés suivantes de la topologie quotient sur $X/\mathcal{R}$ sont fondamentales :
- la projection canonique est continue (c'est à dire que l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert)
- la projection canonique est ouverte (c'est à dire que l'image de tout ouvert est un ouvert) si la relation d'équivalence est associée à un groupe agissant par homéomorphismes sur X (voir partie **??***).*

Démonstration : Il est clair par définition que la projection canonique est continue. Pour la réciproque il suffit de voir que si U est un ouvert de X, $\Pi^{-1}(\Pi(U))$ est la réunion des $g(U)$ pour g dans le groupe d'homéomorphismes agissant sur X.$\square$

La topologie quotient sert un peu partout, par exemples elle définit une topologie sur un espace projectif et le rend compact pour cette topologie (voir le théorème **??**).

1.2.2 Topologie sur un espace d'applications linéaires

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel normé des applications linéaires continues de l'espace normé E dans l'espace normé F. Cet espace est normé par

$$\| \phi \| = sup\{\| \phi(x) \| \mid \| x \| \leq 1\} = sup\{\frac{\| \phi(x) \|}{\| x \|} \mid \| x \| \neq 0\}$$

On peut vérifier facilement qu'il s'agit bien d'un espace vectoriel normé.

Définition 86 (Dual topologique) *L'espace* **dual topologique** *du* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé* E *est l'espace* $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ *des formes linéaires continues.*

Définition 87 (topologie forte) *On appelle* **topologie forte** *la topologie définie sur le dual par la norme usuelle.*

On va voir un peu plus loin des topologies plus ludiques sur le dual. La topologie usuelle sur le dual est la topologie faible, et pas la topologie forte (voir définition plus loin...). Notamment la partie **??** est plus fournie en la matière.

1.2.3 Topologie définie par une famille de parties d'un ensemble

Lemme 88 *Une intersection quelconque de topologies est une topologie.*

Démonstration : Evident en revenant à la définition d'une topologie.□

Définition 89 *Si une topologie* $\mathcal{T}$ *est incluse dans une topologie* $\mathcal{T}'$*, on dit que* T' *est* **plus fine** *que* $\mathcal{T}$*, ou que* $\mathcal{T}$ *est moins fine que* $\mathcal{T}'$*.*

Proposition 90 *Soit* A *une famille de parties de* X *; l'intersection de toutes les topologies contenant* A *est une topologie, c'est la plus petite topologie contenant* A*. On la note* $\mathcal{T}(A)$*, et on dit que c'est la* **topologie engendrée par** A*.* $\mathcal{T}(A)$ *est la famille des réunions arbitraires d'intersections finies de parties de* $A \cup \{\emptyset, X\}$*. Les intersections finies de parties de* $A \cup \{\emptyset, X\}$ *forment une base d'ouverts pour cette topologie.*

Démonstration : Il suffit de considérer le lemme 88 pour avoir l'existence de la plus petite topologie contenant A. Le reste est un petit exercice pas trop dur...□

1.2.4 Topologie définie par une famille d'applications

Proposition 91 *Etant donné Z un ensemble, et X_i une famille d'espaces topologiques, avec $f_i : Z \to X_i$, il existe une plus petite topologie sur Z rendant toutes les f_i continues ; c'est la topologie engendrée par les $f_i^{-1}(U)$ avec U ouvert. Une base de cette topologie est donc l'ensemble des intersections finies d'images réciproques d'ouverts par des f_i.*

Démonstration : Facile avec la proposition 90$\square$

Remarquons que pour $A \subset X$ la topologie engendrée par la fonction (dite injection canonique) qui à x dans A associe x dans X est la topologie induite sur A par celle de X.

Théorème 92 *Dans la situation ci-dessus, une application f de Y dans Z est continue si et seulement si toutes les composées $f_i \circ f$ sont continues.*

On verra une application pour la continuité lorsque l'espace d'arrivée est un espace produit ; théorème 100. Ce théorème permet aussi de montrer la proposition 96.

Démonstration : Application immédiate des définitions.$\square$

Définition 93 *On dit que la famille d'applications f_i est* **séparante** *si et seulement si pour tout (x, y) il existe i tel que $f_i(x) \neq f_i(y)$.*

Proposition 94 *Si les f_i sont séparantes et si les topologies sur les X_i sont séparées, alors la topologie engendrée est séparée.*

Ce lemme permettra de montrer qu'un produit d'espaces séparés est séparé, théorème 101.

Démonstration : Supposons que x et y soient distincts ; alors puisque la famille d'applications est séparante il existe f_i telle que $f_i(x) \neq f_i(y)$; et puisque X_i est séparé, il existe un ouvert U contenant x et un ouvert V contenant y tels que U et V sont disjoints. Les ensembles $f_i^{-1}(U)$ et $f_i^{-1}(V)$ sont ouverts, puisque f_i est continue (par définition de la topologie engendrée !), et disjoints. Le résultat en découle.□

Définition 95 (Topologie faible et topologie faible *) *On appelle* **topologie faible** *sur l'espace normé E la topologie engendrée par l'ensemble des formes linéaires continues de E dans K. On appelle* **topologie faible *** *sur le dual de l'espace normé E la topologie engendré par l'ensemble des applications qui à ϕ associent $\phi(x)$, étant donné $x \in X$.*

Proposition 96 *La topologie forte définie en 87 est plus fine que la topologie faible *.*

Démonstration : En vertu du théorème 92, il suffit de voir que pour tout x la fonction qui à ϕ associe $\phi(x)$ est continue pour la norme, ce qui est facile à prouver (en se ramenant en zéro, une application linéaire étant continue si et seulement si elle est continue en zéro).□

Proposition 97 *La topologie forte d'un espace vectoriel normé est plus fine que la topologie faible.*

Démonstration : En vertu du théorème 92, il suffit de voir que toute ϕ dans E' est continue pour la norme, ce qui est évident.□

Proposition 98 *La topologie forte sur le dual E' est plus fine que la topologie faible, elle même plus fine que la topologie faible *.*

Démonstration : La première partie étant déjà montrée, il suffit de voir que la topologie faible est plus fine que la topologie faible *. Or ceci découle simplement du fait que si deux familles d'applications sont incluses l'une dans l'autre, alors les topologies engendrées sont plus fines l'une que l'autre.□

1.2.5 Topologie produit

Définition 99 (Topologie produit) *On appelle* **topologie produit** *sur le produit des X_i la topologie engendrée par les projections canoniques de X sur X_i.*

Théorème 100 *Avec π_i les projections canoniques, une application f de Y dans X est continue si et seulement si pour tout i $\pi_i \circ f$ est continue.*

Démonstration : Il suffit d'utiliser le théorème 92. □

Théorème 101 *Un produit d'espaces topologiques non vides est séparé si et seulement si chacun des facteurs l'est.*

Démonstration : Les π_i sont séparantes, donc si chaque X_i est séparé, X est séparé, par la proposition 94.
Réciproquement, il suffit de considérer un élément du produit, grâce à l'axiome du choix ; grâce à cet élément, on peut facilement construire une application de X_i dans X qui soit continue et injective ; donc X_i est séparé par le lemme 62.□

Proposition 102 *La topologie sur $X_1 \times X_2$ avec X_i métrique est la topologie associée à la métrique $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = max(d(x_1, y_1), d(x_2, y_2))$; on pourrait aussi prendre la somme.*

Démonstration : On rappelle simplement que les boules constituent une base d'ouverts dans un espace métrique□

⚠ Cette proposition se généralise à un produit fini, et même à un produit dénombrable ; la distance entre $(x_1, x_2, ...)$ et $(y_1, y_2, ...)$ est donnée par $\sum_n \frac{min(1,d_n(x_n,y_n))}{2^n}$, avec d_n la distance sur X_n.

Exercice 103 *Le lemme précédent se généralise à un produit fini quelconque.*

Proposition 104 *Sur un espace normé la somme (opération entre deux élément des l'espace) et la multiplication (d'un élément du corps par un élément de l'espace) sont continues.*

Démonstration : L'addition est continue grâce à l'inégalité triangulaire. La multiplication est continue grâce à $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.□

Proposition 105 *Soit $E_1, ..., E_n$ et F des espaces vectoriels normés . Soit f multilinéaire de $E_1 \times ... \times E_n$ dans F, alors f est continue si et seulement si $\| \phi \| = sup\{\| \phi(x_1, ..., x_n) \| \mid \| x_1 \| \leq 1, ..., \| x_n \| \leq 1\} < +\infty$*

Démonstration : Facile.□
Contrairement au cas des applications linéaires, notons qu'une application multilinéaire continue n'est pas nécessairement lipschitzienne.

Exercice 106 *Une application multilinéaire continue entre un produit d'espaces vectoriels normés et un espace vectoriel normé est lipschitzienne sur chaque sous-ensemble borné.*

Démonstration : Facile.□

1.3 Compacité - liens entre complétude et compacité

1.3.1 Généralités

Définition 107 (Recouvrement ouvert) *Un* **recouvrement ouvert** *de l'espace topologique X est une famille d'ouverts U_i avec $X = \cup U_i$.*

Définition 108 (Compact) *X est* **compact** *s'il est séparé et si de tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous-recouvrement fini.*
Un sous-ensemble K de l'espace X est dit **compact** *s'il est compact pour la topologie induite.*
Une partie A de X est dite **relativement compacte** *si sa fermeture $\overline{A}$ est compacte.*

On verra plus tard (voir lemme 118) que tout compact d'un espace séparé est fermé, et que tout compact d'un métrique est borné (s'il n'était pas borné on extrairait une sous-suite convergente d'une suite non bornée, par le théorème 140).

Un compact, dans le cas général, n'est absolument pas nécessairement fermé ! Considérer par exemple un point, dans un ensemble X contenant au moins deux points et dont la topologie est réduite à $\{\emptyset, X\}$.

Définition 109 *Un espace vérifie la* **propriété de Borel-Lebesgue** *si de tout recouvrement ouvert on peut extraire un recouvrement fini.*

Un espace est donc compact s'il est séparé et s'il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue.

La compacité : éclaircissements, utilisation.

On verra d'autres caractérisations de la compacité que la définition par "séparé+Borel-Lebesgue". Néanmoins cette définition servira par exemple pour le théorème **??** (résultats de régularité sous le signe somme). Elle permettra aussi, en partie 1.6.12, de montrer que la compactifié d'Alexandrov est compact. Les deux premiers points de l'exercice 111, la proposition 112 (l'image continue d'un compact dans un séparé est compact), le théorème 117 de séparation des compacts, le théorème **??** (semblable au théorème de Heine dans le cas de familles équicontinues), le résultat selon lequel tout métrique compact est homéomorphe à une partie du cube de Hilbert en partie 1.6.9, le théorème de Stone **??**, le corollaire du champ rentrant dans la sphère 254, le théorème d'Ascoli **??** utilisent cette même caractérisation.

Les méthodes usuelles pour montrer la compacité d'un ensemble sont le fait qu'un sous-ensemble fermé d'un compact est compact, le fait qu'un produit (quelconque) de compacts est compact (voir le théorème de Tykhonov 127[2], le théorème d'Arzéla-Ascoli **??** (aux multiples applications), et le fait que l'image continue d'un compact dans un séparé est compacte (par exemple, dans le cas des espaces projectifs).

Des théorèmes incontournables en matière de compacité sont le théorème de Banach-Alaoglu 134 (utilisant Tykhonov), le théorème de Heine 139 ; le théorème de Baire (sous une forme moins connue que la forme classique basée sur la complétude) 190 s'applique aux espaces localement compacts. Citons aussi le théorème de Riesz 133, le théorème de Krein-Milman (soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, K un compact convexe de E non vide, alors K est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux : on trouvera une preuve dans [13]), le théorème de Montel **??**.

La compacité dans le cas métrique offre des résultats fondamentaux :

- théorème de Bolzano-Weierstrass 140
- un espace métrique compact est séparable
- une isométrie d'un espace métrique compact dans lui-même est une isométrie[3]
- un espace métrique compact est complet (voir corollaire 176)[4]
-

Théorème 110 *Un espace métrique* **précompact**[a] *et complet est compact.*

[a]Un espace métrique E est dit précompact si quel que soit $\epsilon > 0$ il existe un recouvrement fini de E par des boules de rayon $< \epsilon$.

Démonstration : On a déjà vu qu'un espace compact métrique est complet (corollaire un peu plus haut). Il est clair qu'il est aussi précompact. C'est donc la réciproque qui pose problème.

Supposons donc E précompact et complet. Pour montrer sa compacité, nous allons utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass 140. Considérons donc une suite (x_n) de E. Nous allons en chercher une sous-suite convergeante.

Il existe, par définition, pour i entier ≥ 1, $y_{i,1}, y_{i,2}, ..., y_{i,N_i}$ tels que les boules centrées sur les $y_{i,j}$ et de rayon $\frac{1}{2^j}$ recouvrent E. Construisons par récurrence sur i $1 \leq j_i \leq N_i$ tel qu'une infinité de points x_n soit dans l'intersection des boule de rayon $\frac{1}{2^l}$ centrée sur x_{l,j_l} pour $l \geq i$. On choisit alors $a_i \in \mathbb{N}$, construit aussi par récurrence,

[2]Le théorème de Tykhonov, conjoint au fait qu'un fermé d'un compact est compact, implique d'ailleurs que la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ est compacte, et donc notamment l'équivalence des normes en dimension finie - voir théorème 129

[3]On en trouvera une preuve en application de Bolzano-Weierstrass.

[4]On en déduit notamment que le théorème du point fixe **??** s'applique dans un compact métrique et donc que la boule unité fermée $l^2(\mathbb{N})$ n'est pas compacte ; en cas contraire, l'application $(x_n)_{n\geq 0} \mapsto (y_n)_{n\geq 0}$ avec $y_i = x_{i-1}$ si $i > 0$ et $y_0 = 0$ serait bijective car une isométrie d'un espace complet compact sur lui-même est une bijection comme dit ci-dessus.

tel que la suite des a_i soit croissante, et x_{a_i} soit dans l'intersection des boule de rayon $\frac{1}{2^l}$ centrée sur x_{l,j_l} pour $l \geq i$.

Ceci définit une suite extraite de la suite des x_n, dont on montre facilement qu'elle est de Cauchy. Elle converge donc, par complétude de E. Donc, E est compact.

Une belle application est la proposition 225. $\square$

Un ensemble discret[5] dans un compact est fini ; on en déduit en particulier qu'une fonction holomorphe non nulle a un nombre fini de zéros dans un compact convexe.

Enfin il est capital que l'image d'un compact par une application continue à valeurs dans un espace séparé est compacte (voir théorème 112). Cela entraine en particulier qu'une fonction continue sur un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ atteint ses bornes (d'où le théorème de Darboux **??**, le théorème de Rolle **??**, et certains critères de recherche de minima - voir partie **??**).

Dans les ouvrages en anglais, "compact space" est simplement un espace vérifiant la propriété de Borel-Lebesgue. L'équivalent de notre espace compact est "compact Hausdorff space".

Exercice 111 • *Toute partie finie d'un espace séparé est compacte.*

• *Tout intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est compact.*

• *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace topologique X séparé tendant vers une limite x. Alors $\{x_n/n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est un compact (preuve facile, en considérant un recouvrement par des ouverts, puis en considérant un des ouverts contenant x, et en voyant qu'un nombre fini des éléments de la suite est en dehors de cet ouvert.*

• *$O_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R})$ sont des compacts (en tant que fermés bornés de $\mathbb{R}^n$, qui est de dimension finie).*

• *Les espaces projectifs sont compacts (voir* **??**).

• *Le cube de Hilbert (voir 1.6.9) est compact.*

• *Le compactifié d'Alexandrov d'un espace séparé non compact localement compact est compact (voir 1.6.12)*

Démonstration : La première assertion est triviale. Pour la deuxième, on se donne un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ on considère le plus grand x tel que $[a, x]$ peut être recouvert par un recouvrement fini extrait de $\mathcal{U}$. La suite est facile ou comporte une référence vers une preuve complète.$\square$

> **Proposition 112** *Si f est une application continue d'un espace compact K dans un espace séparé Y, alors $f(K)$ est compact.*

Démonstration : $f(K)$ est évidemment séparé. Etant donné un recouvrement ouvert de $f(K)$ on peut considérer le recouvrement ouvert de K constitué des images réciproques de ces ouverts ; on en extrait un recouvrement fini, et il n'y a plus qu'à repasser dans Y.$\square$

[5]I.e. tout point est isolé.

Cette propriété servira notamment pour le théorème de Rolle **??**, ou pour montrer qu'un espace projectif est compact (théorème **??**). Elle permettra aussi de montrer que tout compact métrique est isomorphe à un sous-espace topologique du cube de Hilbert (voir partie 1.6.9). Enfin, elle permet de montrer que toute isométrie d'un métrique compact sur lui-même est une bijection (corollaire 201).

Il faut noter qu'une propriété plus fine sera parfois utile :

> **Proposition 113** *Soit f une application semi-continue supérieurement d'un compact dans $\mathbb{R}$. Alors f est majorée et atteint sa borne sup.*

Cela servira notamment pour le théorème **??**.

<u>Démonstration :</u>

• Soit K un compact, et f semi-continue supérieurement de K dans $\mathbb{R}$. Soit x la borne sup de $f(t)$ pour t dans K (à priori x peut être égal à $+\infty$).

• Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante tendant vers x avec x_n élément de l'image de f pour tout n. Supposons que la borne sup ne soit pas atteinte (soit elle est infinie, soit x_n tend vers x sans jamais l'atteindre).

• On a alors $K = \cup_{n\in N} f^{-1}(]-\infty, x_n[)$. On peut extraire de ce recouvrement de K un recouvrement fini (en fait, un recouvrement par un seul des $f^{-1}(-\infty, x_n[$ puisque ces ensembles sont croissants) ; donc f est bien majorée.

• K est alors égal à $f^{-1}(]-\infty, x_n[)$ pour un certain n, ce qui contredit le fait que x_n croisse vers x sans jamais l'atteindre - en effet $x_n < x$ implique qu'il existe t dans K tel que $f(t) > x_n$.$\square$

> **Définition 114 (Propriété d'intersection finie non vide)** *Une famille $\mathcal{A}$ de parties de X a la* **propriété d'intersection finie non vide** *si et seulement si tout sous-ensemble fini de $\mathcal{A}$ a une intersection non vide.*

> **Proposition 115** *Un espace topologique est compact s'il est séparé et si toute famille de fermés qui a la propriété d'intersection finie non vide a une intersection non vide.*

<u>Démonstration :</u> Il suffit de considérer les complémentaires des fermés, qui ont le bon goût d'être ouverts.$\square$

Outre les corollaires qui suivent, on pourra voir la proposition 124, ou le lemme **??**.

> **Corollaire 116** *Un fermé d'un compact est compact.*

Voir (par exemple...) **??**.

<u>Démonstration :</u> Un fermé d'un compact est évidemment séparé ; il suffit ensuite de voir qu'un fermé de notre fermé est un fermé de notre espace et d'utiliser la proposition précédente.□

Théorème 117 *Deux compacts disjoints d'un espace séparé peuvent être séparés par des ouverts.*

Démonstration : On montre tout d'abord le lemme suivant :

Lemme 118 *Si X est séparé, et K compact inclus dans X, alors K est fermé.*

Cela servira à chaque fois qu'on voudra montrer que compact équivaut à fermé borné dans un espace donné, par exemple **??**.

Démonstration : On considère x dans le complémentaire de K ; pour tout y appartenant à K on peut séparer x et y par des ouverts U_y et V_y. On peut alors considérer le recouvrement de K par les ouverts V_y et en extraire un recouvrement fini. En prenant l'intersection des U_y correspondants à notre recouvrement fini, on a un ouvert autour de x, n'intersectant pas K. Donc le complémentaire de K est ouvert, donc K est fermé.□

On peut donc terminer la preuve de notre théorème, en considérant un deuxième compact K', et pour tout x de K', on peut trouver un ouvert U_y autour de x et un ouvert V_x contenant K ; on applique la compacité de K', et on obtient facilement deux ouverts disjoints séparant K' de K.

Corollaire 119 *Dans un espace compact, les sous-ensembles fermés sont les sous-ensembles compacts.*

Démonstration : Il suffit de considérer le corollaire 116 et le lemme 118.

Corollaire 120 *Tout point d'un compact possède une base de voisinage compacts.*

Démonstration : (voir figure 1.1) Soit W un voisinage ouvert de x dans l'espace compact X. Le fermé $X \setminus W$ est compact. On peut donc séparer les compacts $\{x\}$ et $X \setminus W$ par deux ouverts U et V. Alors $X \in U \subset X \setminus V \subset W$; et donc $X \setminus V$ est un voisinage compact de x inclus dans W.□

Corollaire 121 *Une fonction continue bijective d'un compact dans un espace séparé est un homéomorphisme.*

On peut citer en applications les résultats 220 et 208 (propriétés du cube de Hilbert et du Cantor triadique).

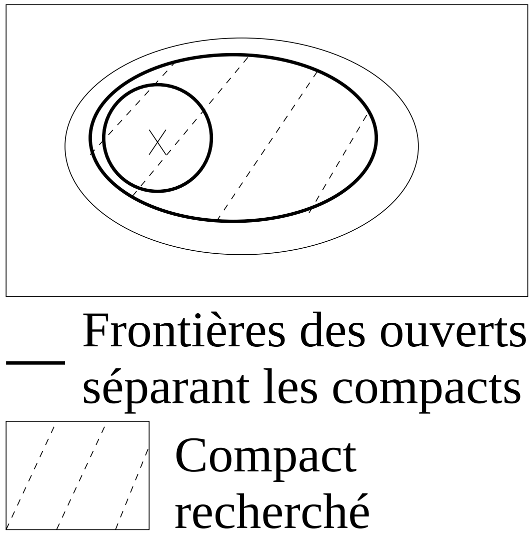

FIG. 1.1 – Construction d'une base de voisinages compacts dans un compact.

Démonstration : Il suffit de voir que l'image d'un fermé (donc compact) est compacte dans l'espace image, et donc elle est aussi fermée. Donc l'image réciproque de tout fermé par la fonction inverse est un fermé.□

On peut utiliser ce résultat pour montrer que tout compact métrique est homéomorphe à une partie du cube de Hilbert, partie 1.6.9.

Théorème 122 *Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés.*

Démonstration : Il suffit de considérer un interval fermé borné autour d'une partie bornée pour montrer facilement ce résultat à partir des résultats précédents et de 111.□

Corollaire 123 *Etant donnée une fonction continue d'un compact dans $\mathbb{R}$, ses bornes supérieures et inférieures sont atteintes.*

Ce résultat sert dans la vie de tous les jours, mais on peut par exemple citer le joli théorème 231, le theorème de Rolle **??**, la recherche de points extrémaux sur un compact (voir **??**). Citons aussi le résultat 233 sur les billards strictement convexes du plan. Enfin, il servira pour le théorème 231 (point fixe commun à un sous-groupe compact d'automorphismes d'un espace de Hilbert).

Démonstration : Trivial au vu du résultat précédent et de la proposition 112.□

Proposition 124 *Toute suite à valeurs dans un compact admet une valeur d'adhérence.*

Démonstration : La suite des $\overline{\{x_m/m \geq n\}}$ a la propriété d'intersection finie non vide ; il ne reste plus qu'à appliquer la proposition 115.□

Définition 125 (Localement compact) *Un espace topologique est* **localement compact** *s'il est séparé et si tout point possède un voisinage compact.*

Proposition 126 *Tout point d'un espace localement compact possède une base de voisinages compacts.*

Démonstration : Si $x \in Int(K)$ avec K compact, alors x possède une base de voisinages compacts dans K muni de la topologie induite (par 120). Comme $x \in Int(K)$, cette base de voisinages est aussi une base de voisinages de x dans X.□

1.3.2 Le théorème de Tykhonov

Théorème 127 (Théorème de Tykhonov) *Soit X_i une famille d'espaces tous non vides. Le produit est compact si et seulement si chacun des facteurs l'est.*

Démonstration : On a déjà montré que le produit est séparé si chacun des facteurs l'est (voir 101). La compacité du produit X entraîne la compacité de chacun des facteurs comme on peut s'en rendre compte en considérant la projection canonique sur chacun des facteurs. Il reste donc à voir la réciproque, c'est à dire que X est compact, si chacun des facteurs l'est. On trouvera une démonstration dans Bourbaki, ou bien dans [13]. La démonstration utilise le lemme de Zorn **??**.

Il est important de noter que l'on peut prouver Tykhonov dans le cas d'un produit dénombrable de compacts métriques (X_i, d_i) sans faire appel à l'axiome du choix. Cela se fait simplement en considérant :
• La métrique d'_i associée à la métrique d_i, avec $d'_i = min(d_i, 1)$.
• La métrique sur le produit des compacts définie par $D(x,y) = \sum \frac{1}{2^i} d'_i(x_i, y_i)$.
• La topologie de cette métrique est la topologie produit.
• Il ne reste plus qu'à utiliser la caractérisation des compacts métriques par les sous-

suites (théorème de Bolzano-Weierstrass, théorème 140).□

Dans le cas d'un produit fini de compacts métriques, la preuve est évidente.

Corollaire 128 *Les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés.*

Démonstration : Etant donnée une partie bornée, on considère un produit d'intervalles fermés bornés dans lequel cette partie est incluse, et le résultat vient tout seul.□

1.3.3 Application aux espaces vectoriels normés

Théorème 129 *Toutes les normes sur un $\mathbb{R}$- ou $\mathbb{C}$- espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes.*

Démonstration : On considère une base, et la norme qui a un élément de E associe la somme des valeurs absolue de ses composantes. On montre qu'une norme quelconque est équivalente à cette norme. Il suffit pour cela de noter que la sphère unité (pour notre norme) est compacte, par compacité de la même sphère dans R^n et continuité des opérations algébriques, et de vérifier que toute norme est continue et donc atteint sur cette sphère un minimum et un maximum (NB : toute norme est continue car K-lipschitzienne pour K le max des normes d'images d'éléments d'une base orthonormale).□

Corollaire 130 *Un sous-espace vectoriel (de dimension finie) d'un espace normé est fermé.*

Une application se trouve juste après le théorème de Baire 190 : un espace de Banach de dimension infinie ne possède pas de base dénombrable.

Démonstration : Nous avons tout d'abord besoin d'un lemme :

Lemme 131 *Un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel de dimension finie est fermé.*

Démonstration : On considère la même norme que dans le théorème précédent. Pour cette norme notre espace est clairement fermé (au vu des équations le définissant). Plus précisément, on considère une base de notre espace vectoriel E, telle que F soit engendré par les k premiers éléments de cette base (c'est possible grâce au théo-

rème de la base incomplète). Alors F est l'intersection d'hyperplans fermés d'équations $x_i = 0$.$\square$
On peut maintenant finir notre preuve ; soit $x \in \overline{F}$, avec F de dimension finie ; alors on se place dans l'espace généré par une base de F plus le vecteur x, et on utilise le lemme ci-dessus.$\square$

Exercice 132 *Toute application linéaire d'un espace normé de dimension finie dans un espace normé est continue.*

Démonstration : Il suffit de considérer une base et la norme définie plus haut.$\square$

Théorème 133 (Théorème de Riesz) *Un espace normé est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte.*

On verra une application amusante avec le corollaire **??**, une autre (utilisant aussi le théorème d'Arzéla-Ascoli et le théorème d'isomorphisme de Banach) avec le théorème **??**.

Démonstration : Supposons E de dimension finie, alors toutes les normes sont équivalentes, on peut se ramener à $E = \mathbb{R}^n$; comme la boule unité est fermée bornée, elle est compacte. Réciproquement (voir figure 1.2), supposons la boule unité fermée compacte, alors on peut la recouvrir par des boules ouvertes de diamètre 0.5 en nombre fini. On considère alors l'espace F engendré par les centres de ces boules, et on montre que l'on peut approcher tout point de la boule arbitrairement bien avec des points de F ; ensuite on utilise le fait que F est de dimension finie et donc est fermé.$\square$

Théorème 134 (Théorème de Banach-Alaoglu) *Soit E' le dual d'un espace normé, alors sa boule unité fermée est compacte pour la topologie faible * (ie la topologie engendrée par les applications qui à $\phi \in E'$ associent $\phi(x)$ pour un certain $x \in E$.*

La boule unité fermée est l'ensemble des formes linéaires ϕ telles que $\|\phi(x)\| \leq \|x\|$.

Démonstration : (voir figure 1.3) On identifie E' à une partie du produit $\mathbb{K}^E$, en identifiant ϕ à $(\phi(x))_{x \in E}$. La topologie faible * est alors la topologie induite sur E' par la topologie produit sur $\mathbb{K}^E$. La boule unité $\overline{B_{E'}}$ est contenue dans $\Gamma = \Pi_{x \in E} \overline{B}(0, \| x \|) \subset \mathbb{K}^E$. Par le théorème de Tykhonov ce produit est compact. Il suffit donc maintenant de montrer que $\overline{B}_{E'}$ est fermé comme sous-ensemble de Γ muni de la topologie produit, ce qui se fait aisément en considérant les équations définissant $\overline{B}_{E'}$ (qui sont simplement les équations définissant les fonctions linéaires).$\square$

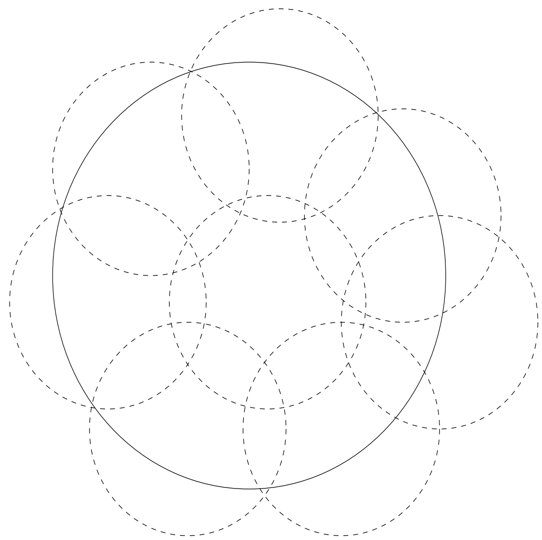

FIG. 1.2 – Le théorème de Riesz. On approxime x de la boule par le centre du cercle le plus proche, et on réitère avec le double de la distance entre x et ce centre.

Voir la proposition **??** par exemple.

Proposition 135 *La boule unité fermée du dual d'un espace séparable est métrisable pour la topologie faible *.*

Démonstration : On considère une suite x_n dense dans E, à valeurs non nulles ; la topologie faible sur la boule unité fermée peut être définie par la métrique

$$d(\phi, \psi) = \sum_{n \geq 0} \frac{|\phi(x_n) - \psi(x_n)|}{\| x_n \| .2^n}$$

Cette (courte) vérification étant faite, le résultat est acquis.□

Corollaire 136 *On peut en outre extraire de toute suite de la boule unité fermée du dual d'un espace séparable une suite convergeant faiblement.*

Démonstration : Laissée au lecteur...□

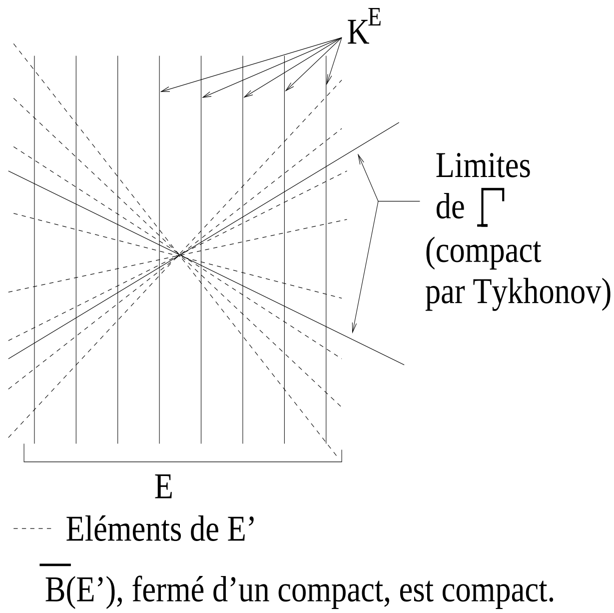

FIG. 1.3 – Schéma explicatif de la preuve du théorème de Banach-Alaoglu.

1.3.4 Espaces métriques compacts

Théorème 137 *Un espace métrique compact est séparable. Il possède donc une base dénombrable d'ouverts.*

Démonstration : Soit X métrique compact. Pour tout n on peut trouver une suite finie de points telle que les boules centrées sur ces points et de rayon $\frac{1}{n}$ recouvrent X. La suite obtenue en mettant bout à bout toutes ces suites finies est dense dans X.$\square$

Corollaire 138 *Un espace métrique compact est de cardinal inférieur ou égal à celui de* $\mathbb{R}$.

Démonstration : Un espace métrique compact est séparable ; donc il admet une base dénombrable d'ouverts. En prenant un x_i dans chaque ouvert, on obtient donc que tout point est limite d'une suite de x_i. Il suffit alors de voir que l'ensemble des suites d'un ensemble au plus dénombrable est de cardinal au plus la puissance du continu, ce qui se voit facilement, en considérant par exemple la fonction qui à un réel $x \in [0,1]$ dont le développement binaire comporte une infinité de 1 associe la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que u_n est égal au nombre de 0 entre le n-ième 1 et le $n+1$-ième 1.$\square$

Théorème 139 (Théorème de Heine) *Une application continue d'un espace métrique compact vers un espace métrique est uniformément continue.*

Ce théorème servira par exemple pour le théorème **??**. Il peut aussi servir à montrer qu'une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tendant vers une limite finie en plus et moins l'infini est uniformément continue.

Démonstration : On considère, pour $\epsilon > 0$, pour chaque $x \in X$, $\alpha_x > 0$ tel que $d(x,y) < \alpha_x \rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon/2$. Par compacité, on peut recouvrir X par un nombre fini de boules de centre x et de rayon $\alpha_x/2$. On prend alors $\alpha = inf \alpha_i$, et le résultat vient tout seul...□

Théorème 140 (Théorème de Bolzano-Weierstrass) *Un espace métrique est compact si et seulement si toute suite à valeurs dans X contient une sous-suite convergente.*

Voir par exemple le théorème de Brouwer 252, le théorème de Tykhonov dans le cas d'un produit dénombrable d'espaces métriques (voir juste après le théorème 127) sans utiliser l'axiome du choix. Le théorème est aussi utilisé dans le lemme **??**, qui servira à démontrer le théorème de Runge. Le corollaire 142 est une autre application : toute isométrie d'un espace métrique compact dans lui-même est une bijection.

Démonstration : Si X est métrique compact, alors toute suite (x_n) a une valeur d'adhérence (considérer la suite décroissante de parties de X constituées des éléments $X_n = \overline{\{x_k/k \geq n\}}$; la suite des adhérences de ces parties a la propriété d'intersection finie), et X étant métrique, une sous-suite converge vers cette valeur d'adhérence.
Réciproquement, considérons tout d'abord les deux lemmes suivants :

Lemme 141 (Lemme de Lebesgue) *Soit (X,d) un espace métrique tel que toute suite contienne une sous-suite convergente. Si V_i est un recouvrement ouvert de X, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in X$, il existe i tel que $B(x,\epsilon) \subset V_i$.*

Démonstration : Dans le cas contraire, on peut pour tout entier n trouver un x_n tel que la boule de centre x_n et de rayon $1/n$ ne soit contenue dans aucun V_i. Alors on extrait de cette suite une sous-suite convergente. On obtient que pour n assez grand les boules en question seront incluses dans le V_i qui contient x.□

Corollaire 142 *Une isométrie d'un espace métrique compact sur lui-même est une bijection.*

<u>Démonstration :</u> Supposons E un tel espace, et f une isométrie de E dans E.

Supposons que x n'appartienne pas à l'image de f. Alors, x est à distance $> \epsilon > 0$ de l'image de f (en effet l'image de f est compacte comme image continue d'un compact, voir proposition 112, or la distance entre un compact et un fermé disjoint de lui est > 0, voir corollaire 201).

Considérons alors $u_n = f^n(x)$, et supposons que u_{k_n} converge, pour (k_n) une certaine suite strictement croissante. Si l'on aboutit à une contradiction, alors le théorème de Bolzano Weierstrass permettra de conclure que l'espace ne peut être compact.

$d(u_{k_n}, u_{k_{n+1}}) = d(u_{k_{n+1}-k_n}, x)$ puisque f est une isométrie. Or $d(u_{k_{n+1}-k_n}, x) > \epsilon$ par définition de x et puisque les u_n appartiennent à l'image de f pour $n > 0$. D'où la contradiction recherchée.□

Lemme 143 *Sous les mêmes hypothèses que le lemme 141, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une suite finie x_i telle que les boules $B(x_i, \epsilon)$ recouvrent X.*

<u>Démonstration :</u> Si le lemme est faux pour un certain ϵ, alors on peut construire par récurrence une suite telle que chaque point soit à une distance au moins ϵ des autres points, ce qui contredit l'hypothèse.□

Avec ces deux lemmes on conclut facilement ; si toute suite contient une sous-suite convergente, alors étant donné un recouvrement ouvert (V_i), on peut construire par le premier lemme un ensemble de boules recouvrant X et tel que chaque boule est incluse dans l'un des V_i ; ensuite par le deuxième lemme, on se ramène à un nombre fini de points, et il ne reste plus qu'à cueillir le bon sous-ensemble des V_i.□

1.4 Connexité

Définition 144 *Un espace topologique est dit* **connexe** *si les seuls sous-ensembles de X à la fois ouverts et fermés sont $\emptyset$ et X. Une partie d'un espace topologique est connexe si elle est connexe pour la topologie induite.*

On utilisera la connexité pour montrer :

- certaines formes du théorème des valeurs intermédiaires 150.
- le corollaire **??** sur la dérivabilité d'une limite d'une suite de fonctions.
- les lemmes **??** et **??**, utile pour une démonstration du théorème de Jordan
- la proposition **??** utilisera la connexité pour définir une distance dans un ouvert connexe d'un espace vectoriel normé
- théorème de Runge, **??**.

- Tous les résultats basés sur l'indice, par exemple le théorème de Cauchy **??**, et beaucoup de résultats sur les fonctions holomorphes.
- L'exercice de la partie 1.6.18, montrant qu'une fonction f C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x\ \exists n\ f^{(n)}(x) = 0$ est polynomiale.

On trouvera diverses autres applications de la connexité plus loin dans ce chapitre.

Proposition 145 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) X est connexe
(ii) Une application ϕ de X dans $\{0,1\}$ continue est constante, avec $\{0,1\}$ muni de la topologie discrète.
(iii) Pour tout couple d'ouverts A et B de X, si $X = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$, alors $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$
(iv) Pareil avec des fermés
(v) Toutes les parties de X non triviales (i.e. autres que X et $\emptyset$) ont une frontière non vide.

Démonstration : Facile :

(i) $\to$ (ii) Si X est connexe, montrons que toute application continue de X dans $\{0,1\}$ est constante.

En effet, si une telle application f n'était pas constante, on partitionnerait X en deux ouverts non vides ($f^{-1}(0) = f^{-1}(]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[)$ et $f^{-1}(1) = f^{-1}(]\frac{1}{2},\frac{3}{2}[)$) ; chacun d'eux serait alors à la fois ouvert, fermé, et non trivial.

La réciproque (ii) $\to$ (i) est non moins simple (raisonner par l'absurde : si A ouvert et fermé non vide et différent de X, alors prendre la fonction caractéristique de A dans X).

(ii) $\to$ (iii) Facile, en voyant que si A et B contredisent l'hypothèse, A est ouvert et fermé et non trivial.

Le reste est du même niveau de difficulté, je le passe sous silence... $\square$

Proposition 146 • *Si $A \subset X$ est connexe et si $A \subset B \subset \overline{A}$, alors B est connexe.*
• *Si les A_i sont des parties connexes de X et $\cap A_i \neq \emptyset$, alors $\cup A_i$ est connexe.*
• *Si les A_i sont des parties connexes de X et pour tout couple A_i, A_j il existe $i_0, ..., i_k$ avec $i_0 = i$ et $i_k = j$ tels que A_{i_l} intersecte $A_{i_{l+1}}$, alors $\cup A_i$ est connexe.*

Démonstration : Pour montrer la première assertion on utilise la deuxième des caractérisations des connexes données en 145.
La deuxième assertion n'est qu'un cas particulier de la troisième.
La troisième assertion là aussi se montre en utilisant la seconde des caractérisations des connexes données en 145.$\square$

Théorème 147 *Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*

Démonstration : Facile.□

Théorème 148 *L'image d'un connexe par une fonction continue est un connexe.*

Démonstration : Facile toujours en utilisant la même caractérisation des connexes.□

Théorème 149 *Soit f une application continue définie sur un connexe et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors l'image de f est un intervalle.*

Démonstration : Facile au vu des deux théorèmes précédents.□

Corollaire 150 *Le théorème des valeurs intermédiaires (dans le cas d'une fonction continue, pas dans le cas d'une fonction dérivée) découle immédiatement du théorème ci-dessus.*

Théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction dérivée, dit aussi théorème de Darboux, **??**.

Théorème 151 (passage à la douane) *Soit X un espace topologique et $A \subset X$ connexe. Si A intersecte à la fois B et son complémentaire, alors A intersecte la frontière de B.*

Démonstration : Il suffit de voir que les deux ouverts $Int(B)$ et $Ext(B)$ ne peuvent recouvrir A.□

Théorème 152 *Un produit d'ensembles non vides est connexe si et seulement si chacun des facteurs l'est.*

Démonstration : Il est facile de voir, via les projections canoniques, que si le produit est connexe, chacun des facteurs l'est. La réciproque est plus difficile. On commence par le cas où le produit est un produit de deux espaces (voir figure 1.4). Pour cela on montre que tous les couples $(x, y) = (x_1, x_2), (y_1, y_2)$ sont contenus dans un sous-ensemble connexe de $X_1 \times X_2$; on utilisera ensuite la proposition 146. Il suffit pour ce résultat intermédiaire de considérer l'union de $X_1 \times \{y_2\}$ et de $\{x_1\} \times X_2$. Par récurrence, on généralise ce résultat à tout produit fini de connexes.

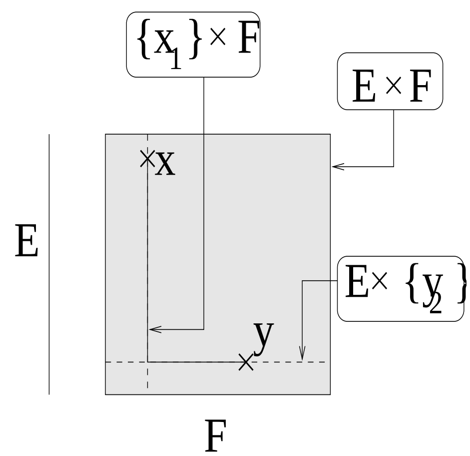

FIG. 1.4 – Un produit fini d'ensembles est connexe si et seulement si chacun des facteurs l'est. La généralisation à un produit infini se fait par un argument de connexité de l'adhérence d'une partie connexe convenablement choisie (voir le texte).

On considère maintenant un produit quelconques X de facteurs X_i connexes non vides. On considère un élément y de X, en utilisant l'axiome du choix. Pour A fini inclus dans I (I est l'index de X_i), on définit alors le sous-ensemble X_A de X défini par $(x_i) \in X_A$ si et seulement si $x_i = y_i$ pour tout i tel que $i \notin A$. X_A est connexe puisqu'homéomorphe à un produit fini de X_i. On peut vérifier que la réunion des X_A est dense dans X (en se rappelant qu'une base d'ouverts d'une topologie produit est l'ensemble des intersections finies d'images d'ouverts par les projections inverses) et connexe (par le deuxième point de la proposition 146), et on conclut par le premier point de la proposition 146.□

Théorème 153 *Une fonction localement constante sur un connexe est constante.*

Démonstration : Il suffit de voir que l'image réciproque d'un singleton est à la fois ouverte et fermée.□

Définition 154 (Composante connexe) *Avec $x \in X$, la* **composante connexe** *de x, notée $C(x)$, est la réunion de tous les connexes contenant x.*

Proposition 155 • *Tout point appartient à sa composante connexe*
• *La composante connexe d'un point est le plus grand connexe contenant ce point*
• *Les composantes connexes sont fermées*
• *Deux composantes connexes sont disjointes ou confondues. En particulier, la famille des composantes connexes forment une partition de l'espace.*

Démonstration : Le premier point est trivial, le deuxième aussi par 146, le troisième découle de la connexité de $\overline{C(x)}$, le quatrième point découle du fait que la réunion de deux connexes non disjoints est un connexe (deuxième point de la proposition 146).□

Définition 156 (Arc ou chemin, ligne brisée) *Un* **arc ou chemin** *est une application continue de $[0,1]$ dans X. L'image de 0 et l'image de 1 sont les extrémités de l'arc.*
Une **ligne brisée entre** *a* **et** *b est une suite finie de segments $[x_i, x_{i+1}]$ avec $i \in [0, n-1]$, $x_0 = a$ et $x_n = b$.*
On appelle **longueur d'une ligne brisée** *la somme des longueurs de ses segments.*

Exercice 157 • *Dans un espace normé, l'application qui à t associe $(1-t).x + t.y$ est un arc d'extrémités x et y (on dit aussi un arc entre x et y). L'image de cet arc est appelée segment, noté $[x, y]$.*
• *D'un arc entre x et y et un arc entre y et z on peut déduire un arc entre x et z.*

Définition 158 (Connexe par arcs) *Un espace topologique est dit* **connexe par arcs** *si il existe un arc entre toute paire de points.*
Une partie d'un espace topologique est dite connexe par arcs si elle est connexe par arcs pour la topologie induite.

Exemples : Un convexe est connexe par arcs.

Démonstration : Cela découle des exemples ci-dessus.□

Proposition 159 *Un connexe par arcs est connexe. La réciproque est fausse.*

Démonstration : On fixe x dans un espace connexe par arcs. Chaque arc est un connexe, car image d'un connexe ($[0, 1]$) par une fonction continue ; la réunion des arcs partant de x est connexe (par la proposition 146), or par définition cette réunion est l'espace tout entier. Pour la réciproque, considérer la figure 1.5.□

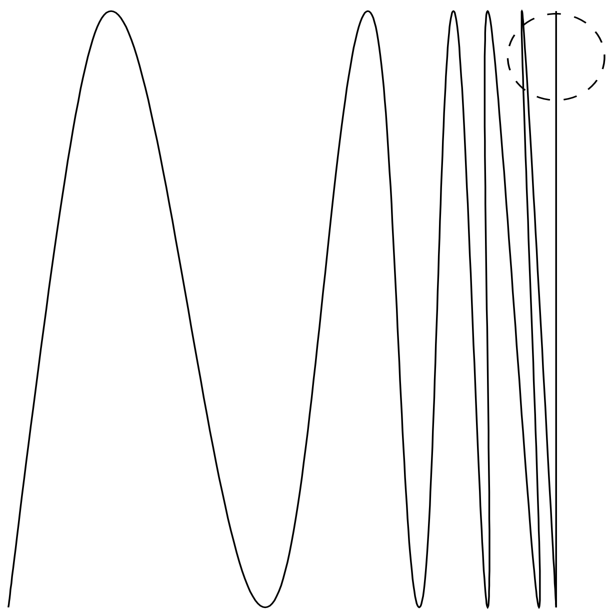

FIG. 1.5 – Un connexe qui n'est pas connexe par arcs. La même figure fournit un exemple de connexe qui n'est pas localement connexe. Il s'agit de la courbe des $(x, sin(1/x))$ vers 0 par valeurs inférieures, plus la frontière $\{0\} \times [-1, 1]$. On voit que la figure n'est pas localement connexe en considérant ce qu'il se passe au voisinage du point $(0, 1)$.

Exercice 160 *Soit l'application* $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$*, qui à* x *associe* $1/sin(x)$*. Montrer que la fermeture de son graphe est connexe mais pas connexe par arcs.*

Démonstration : On suppose qu'il existe une fonction ϕ continue qui à 0 associe $(0, 1)$ et à 1 associe $(1, sin(1))$, et telle que pour tout x on ait $\phi(x)$ appartienne au graphe de f. On considère x_0 le sup de l'ensemble des x tels que la première composante de $\phi(x)$ soit nulle. Il suffit ensuite de considérer la limite de la deuxième composante pour x tendant vers x_0.□

Proposition 161 *Soit C_i une famille de parties connexes par arcs. Si pour toute paire i, j il existe une suite finie $C_{a_0}, ..., C_{a_k}$ avec $C_{a_h} \cap C_{a_{h+1}} \neq \emptyset$ et $a_0 = i$ et $a_k = j$, alors la réunion est connexe par arcs.*

Démonstration : Facile.□

Définition 162 (Composante connexe par arcs) *La* **composante connexe par arcs** *de x est la réunion de tous les connexes par arcs passant par x ; on la note $C_a(x)$.*

Proposition 163 • *La composante connexe par arcs d'un point est connexe par arcs.*
• *Deux composantes connexes par arcs sont soit disjointes soit confondues.*
• *$C_a(x) \subset C(x)$, car $C_a(x)$ est un connexe contenant x, et $C(x)$ est le plus grand connexe contenant x par définition.*

Définition 164 (Localement connexe (par arcs)) *Un espace est* **localement connexe (resp. par arcs)** *si tout point de l'espace possède une base de voisinage connexes (resp. par arcs).*

⚠ Attention ; un espace peut être connexe sans être localement connexe. Voir par exemple la figure 1.5.

Notamment, alors qu'un espace dont tout point possède un voisinage compact (par exemple un espace compact !) est localement compact, un espace dont tout point possède un voisinage connexe n'est pas nécessairement localement connexe.

Théorème 165 *Dans un espace localement connexe (resp. localement connexe par arcs), les composantes connexes (resp. par arcs) des ouverts sont ouvertes.*

Démonstration : Facile.□

Corollaire 166 *Dans un espace localement connexe (resp. localement connexe par arcs) tout point possède une base de voisinages ouverts et connexes (resp. connexes par arcs).*

Démonstration : Il suffit de considérer, étant donné x et un voisinage V de x, un ouvert inclus dans V et contenant x,et une composante connexe (resp. par arcs) de x dans cet ouvert.□

On peut noter le théorème suivant :

Théorème 167 *Dans un espace localement connexe par arcs, les ouverts connexes sont connexes par arcs. Notamment, les ouverts connexes de $\mathbb{R}^n$, ou de tout espace vectoriel normé* [a] *sont connexes par arcs.*

[a] Ou même de tout espace vectoriel topologique.

1.5 Complétude

1.5.1 Suites de Cauchy. Espace complet

Définition 168 (Suite de Cauchy) *Une suite (x_n) dans un espace métrique est dite* **suite de Cauchy** *si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, m > N$ on a $d(x_n, x_m) < \epsilon$.*

⚠ La notion de suite de Cauchy est une notion métrique et non une notion topologique. Même si deux distances sont équivalentes, on ne peut être sûr que les suites de Cauchy soient les mêmes pour les deux métriques. Par exemple avec $d(x, y) = |arctan(x) - arctan(y)|$, la topologie sur $\mathbb{R}$ est la même que pour la topologie usuelle, mais la suite $u_n = n$ n'est pas de Cauchy pour la métrique usuelle, alors qu'elle est de Cauchy pour cette métrique.

Proposition 169 • *Etant donnée une suite x_n, notons $X_n = \{x_k/k \geq n\}$; alors la suite x_n est de Cauchy si et seulement si le diamètre de X_n tend vers 0.*
• *Dans un espace métrique toute suite convergente est de Cauchy.* • *L'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue est une suite de Cauchy.*

Définition 170 (Espace complet) *Un espace métrique X est* **complet**, *si toute suite de Cauchy de X a une limite dans X.*

Quelques exemples d'espaces complets :

• les exemples de Banach donnés un peu plus loin.
• $C^k(\Omega)$ avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, voir partie **??**.

Une propriété fondamentale des espaces complets est le théorème du point fixe **??**.

Définition 171 (Espace de Banach) *Un* **espace de Banach** *est un espace vectoriel normé complet.*
Un **isomorphisme entre l'espace de Banach** E **et l'espace de Banach** F *est un isomorphisme des espaces vectoriels normés sous-jacents.*

Quelques exemples d'espaces de Banach :
• $\mathbb{R}$
• $\mathbb{R}^n$ muni d'une des normes suivantes :
- $(x_1, ..., x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n |x_i|$
- $(x_1, ..., x_n) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
- $(x_1, ..., x_n) \mapsto max_{i=1}^n |x_i|$
• L'ensemble des applications continues bornées d'un espace topologique X dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni de la norme $f \mapsto sup_{x \in X}|f(x)|$
• Les espaces L^p, comme on le verra en **??**
• Si F est un Banach et E un espace vectoriel normé , alors $\mathcal{L}(E, F)$ (ensemble des fonctions linéaires continues de E dans F) est un Banach (pour la norme $f \mapsto sup_{\|x\|=1}\|f(x)\|$).

On rappelle que deux normes sont dites équivalentes si elles définissent la même topologie.

Tout d'abord quelques propriétés des Banachs issues directement de la partie 1 :
• Un isomorphisme algébrique (i.e. un isomorphisme au sens des espaces vectoriels) continu entre espaces de Banach est un isomorphisme d'espaces vectoriels normés .
• Toutes les normes sont équivalentes sur des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie.
• Deux normes sont équivalentes si et seulement si chacune d'elle est inférieure à une certaine constante multipliée par l'autre
• Un espace vectoriel normé de dimension finie est complet, et donc est un Banach.
• Les compacts d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont les fermés bornés.

Proposition 172 *Etant donnés des espaces métriques E_i en nombre fini, le produit $E_0 \times ... \times E_n$ peut être équipé d'une métrique définie par $d((x_i),(y_i))$ de l'une des formes suivantes (entre autres) :*
- $\sum_i d(x_i,y_i)$
- $\sqrt{\sum_i d(x_i,y_i)^2}$
- $\sqrt[p]{\sum_i d(x_i,y_i)^p}$
- $max_i d(x_i,y_i)$

Ce sont bien des distances et elles sont équivalentes entre elles. La topologie ainsi définie est la topologie produit, que l'on a définie plus tôt.

Proposition 173 *Un espace métrique est complet si et seulement si l'intersection de toute suite décroissante de fermés non vides de diamètre tendant vers 0 est non vide et donc réduite à un point.*

<u>Démonstration :</u> Si l'espace métrique est complet, alors on considère x_n appartenant au n-ième fermé ; la suite est de Cauchy, et converge donc vers un point ; quel que soit n, ce point est limite d'une suite de points de X_n ; donc il appartient à X_n puisque X_n est fermé. En outre, le diamètre tendant vers 0, le diamètre de l'intersection est 0 ; donc il s'agit d'un seul point.
Réciproquement, étant donnée une suite de Cauchy x_n, on considère la suite des X_n avec $X_n = \overline{\{}x_k/k \geq n\}$; cette suite vérifie les hypothèses, donc l'intersection des X_n est réduite à un point. On montre facilement que ce point est limite des x_n.$\square$

Proposition 174 *Un produit fini d'espaces métriques complets, muni d'une métrique comme défini ci-dessus, est complet.*
Réciproquement un produit fini d'espaces métriques, muni d'une métrique comme défini ci-dessus, est complet si et seulement si chacun des facteurs l'est.

<u>Démonstration :</u> La démonstration (pas très difficile) est laissée au lecteur.$\square$

Proposition 175 *Si une suite de Cauchy a une valeur d'adhérence, elle est convergente.*

<u>Démonstration :</u> On considère une suite extraite qui converge, et on montre facilement que la suite tend vers la même limite.$\square$

Corollaire 176 *Un espace métrique compact est complet.*

<u>Démonstration :</u> S'il est compact, toute suite a une valeur d'adhérence (par le théorème de Bolzano-Weierstrass 140) ; il suffit alors d'appliquer la proposition précédente.$\square$

Théorème 177 *Le corps $\mathbb{R}$ est complet pour sa métrique ; de même $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme est complet pour cette norme. Plus généralement un espace normé de dimension finie est complet.*

<u>Démonstration :</u> On considère une norme sur E de dimension finie et une suite de Cauchy x_n. On montre que pour un certain N la suite est à valeurs dans la boule de centre x_N et de rayon 1 à partir du rang N, directement par la définition d'une suite de Cauchy ; on a donc une suite dans un compact, et donc la suite de Cauchy converge vers un élément de cette boule.$\square$

On trouvera par exemple une utilisation de ce théorème dans 185.

Proposition 178 *Un sous-ensemble d'un métrique complet est complet si et seulement si il est fermé.*

<u>Démonstration :</u> Soit A un sous-ensemble fermé de X complet. Si x_n est une suite de Cauchy dans A, c'est aussi une suite de Cauchy dans X, donc elle converge. Si A est fermé la limite est dans A. Réciproquement, on suppose x dans $\overline{A}$, et on choisit une suite x_n qui tend vers x ; et on remarque que x_n est de Cauchy et donc converge vers une limite dans A puisque A est complet.$\square$

Définition 179 (Série absolument convergente) *Soit E un espace vectoriel normé. (x_n) dans E est appelée une* **série absolument convergente** *si $\sum_{n\geq 0} \| x_n \| < +\infty$.*

Théorème 180 *Un espace vectoriel normé E est complet si et seulement si toute série absolument convergente (x_n) est convergente dans E.*

<u>Démonstration :</u> Supposons E complet.
Soit une série x_n absolument convergente. Pour $m > n$ on a

$$\begin{aligned} d(\sum_{i=0}^{n} x_i, \sum_{i=0}^{m} x_i) &= \| \sum_{i=n+1}^{m} x_i \| \\ &\leq \sum_{i=n+1}^{m} \| x_i \| \\ &\leq \sum_{i=n+1}^{+\infty} \| x_i \| \\ &\to 0 \end{aligned}$$

Donc la suite $y_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$ est de Cauchy, et donc converge.

Réciproquement supposons maintenant que toute série absolument convergente converge. On se donne x_n une suite de Cauchy. On en extrait une sous-suite, et $\| x_m - x_{n_k} \| \leq \frac{1}{2^k}$ pour $m \geq n_k$; la série correspondante est absolument convergente ; il est facile d'en déduire que la suite a une valeur d'adhérence, et donc qu'elle converge.□

Théorème 181 *Si E est normé et si F est de Banach, alors l'espace normé $\mathcal{L}(E, F)$ est aussi de Banach.*

Démonstration : Soit f_n une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, F)$. Pour tout $x \in E$, on a $\| f_n(x) - f_m(x) \| \leq \| f_n - f_m \| . \| x \|$, donc la suite $f_n(x)$ est de Cauchy dans F ; elle converge vers un élément que l'on note $f(x)$. Il est clair que f est linéaire. On fixe alors $\epsilon > 0$. On choisit N tel que $\| f_n - f_m \| \leq \epsilon$, pour $n, m > N$, et on considère x de norme < 1. En faisant tendre m vers l'infini on obtient que $\forall n > N$ $\| f_n(x) - f(x) \| \leq \epsilon$; donc f est bornée sur la boule unité, et donc f est continue. On obtient avec la même formule la convergence de f_n vers f au sens de la norme. En résumé, la preuve s'obtient en montrant la convergence simple (facile), puis en montrant que la limite est linéaire (trivial), puis qu'elle est continue (y'a qu'à l'écrire et ça roule). □

Corollaire 182 *Le dual E' d'un espace normé E est un espace de Banach.*

Démonstration : Par application immédiate du théorème précédent.□

Voir le corollaire **??**.

Théorème 183 *Si K est un espace compact et Y un espace complet, alors l'espace des applications continues de K dans Y $C^0(K, Y)$ est métrique complet pour la distance $d(f, g) = sup_x d(f(x), g(x))$.*

Démonstration : La compacité de K permet de vérifier que la fonction d est bien définie ; elle est clairement effectivement une métrique. Etant donnée f_n une suite de Cauchy dans l'espace considéré, on montre facilement que cette suite converge simplement vers une certaine fonction f ; en utilisant la continuité de f_n et la convergence uniforme on conclut facilement à la continuité de f. La convergence uniforme des f_n découle facilement du critère de Cauchy dans l'espace considéré.□

Voir par exemple le théorème **??**. On peut citer aussi le fait que l'espace des applications continues d'un espace K compact dans un espace E de Banach est de Banach pour la norme $\|f\|_\infty = sup_x \|f(x)\|_E$.

Exercice 184 *Si $E_1, ...E_n$ sont des espaces vectoriels normés, avec F de Banach, montrer que l'espace normé $L(E_1, ..., E_n); F)$ est aussi de Banach.*

1.5.2 Complété d'un espace métrique

Théorème 185 *Tout espace métrique (X, d) se plonge isométriquement dans un espace complet $(\tilde{X}, \tilde{d})$ avec X dense dans $\tilde{X}$.*
Si on se donne deux tels plongements, alors l'identité sur X s'étend de manière unique en une isométrie de $\tilde{X}_1$ et $\tilde{X}_2$.

Définition 186 *Un tel espace métrique complet est appelé* **complété** *de X.*

Démonstration :
Existence :
• on commence par introduire une relation d'équivalence entre les suites de Cauchy : on dit de deux suites qu'elles sont équivalentes si la distance entre l'une et l'autre tend vers 0 (ie (x_n) est équivalente à (y_n) si $\lim x_n - y_n \to 0$).
• On considère $\tilde{X}$ l'ensemble des classes d'équivalences pour cette relation.
• On note par $[x_n]$ la classe d'équivalence de la suite x_n.
• On remarque que la distance entre x_n et y_n tend vers une limite donnée pour n tendant vers $+\infty$ (noter que pour ce point on utilise la complétude de $\mathbb{R}$ montrée un peu plus tôt).
• On peut donc prendre pour distance sur $\tilde{X}$ la limite de la distance entre deux suites pour n tendant vers l'infini ; on vérifie facilement qu'il s'agit bien d'une distance.
• On peut prendre pour plongement la fonction qui à x associe la suite constante égale à x.
• On constate facilement que ce plongement est une isométrie.
• On peut voir facilement que l'image du plongement est dense dans $\tilde{X}$ en considérant pour une suite donnée x_n la suite des suites de Cauchy constante égales à x_n.
• On peut maintenant identifier X et son image.
• On considère maintenant une suite de Cauchy dans $\tilde{X}$, notée y_n.

• Pour tout n on peut choisir x_n, suite de Cauchy, telle que la distance (dans $\tilde{X}$) entre x_n et y_n soit inférieure à $1/n$.
• La suite x_n est de Cauchy dans $\tilde{X}$, et donc aussi dans X. Par définition de $\tilde{X}$, la limite de la suite x_n est la classe des suites dont la distance à x_n est nulle.
• Il ne reste plus qu'à voir que y_n tend aussi vers cette limite.

L'unicité résulte du corollaire 188.$\square$

Théorème 187 *Soient deux espaces métriques A et B avec B complet. Si D est une partie dense de A et $f : D \to B$ est uniformément continue, alors il existe un et un seul prolongement continu $\tilde{f} : A \to B$. Cette fonction $\tilde{f}$ est de plus uniformément continue.*

Démonstration : • L'unicité est évidente, par unicité de la limite et par la densité de D dans A.

• L'existence découle immédiatement du critère de Cauchy, grâce à la complétude de B.

• Il reste à montrer l'uniforme continuité : soient x et y distincts dans A. Soit $x_n \to x$ et $y_n \to y$, avec x_n et y_n dans D. $d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) \leq 2d(f(x_n), f(y_n))$ si n est assez grand. L'uniforme continuité de $\tilde{f}$ en découle immédiatement.

Cela servira à montrer quelques propriétés simples des espaces de Hölder, voir **??**, et le théorème de Plancherel. L'escalier de Cantor utilise aussi ceci (voir partie 1.6.13). Cela permet aussi de voir que si E est métrique complet connexe localement connexe, alors E est connexe par arcs

Corollaire 188 *Une isométrie $i : D \to B$ d'un sous-ensemble dense de l'espace métrique A sur une partie de l'espace métrique complet B s'étend de manière unique en une isométrie $\tilde{i} : A \to B$ de A sur une partie de B. L'extension $\tilde{i}$ est une bijection de A sur B si et seulement si $i(D)$ est dense dans B.*

Démonstration : Evident, même preuve que pour le théorème 187.$\square$

1.6 Zoologie de la topologie

1.6.1 Séparation de fermés par des ouverts dans un métrique

Proposition 189 *Soient F_1 et F_2 deux fermés disjoints d'un espace métrique (E, d). Alors il existe deux ouverts U_1 et U_2 tels que $F_1 \subset U_1$ et $F_2 \subset U_2$, U_1 et U_2 étant disjoints.*
En outre il existe une fonction continue de E dans $[0, 1]$ dont la restriction à F_1 est égale à 0 et dont la restriction à F_2 est 1 (c'est à dire que $\chi_{F_2} \leq f \leq \chi_{F_1^c}$).

Démonstration : Considérer la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sup(d(x, F_1) - d(x, F_2), 0)}{d(x, F_1)}$$

si $x \notin F_1$ et $f(x) = 0$ sinon. puis $U_1 = f^{-1}([0, 0.5[)$ et $U_2 = f^{-1}(]0.5, 1])$.$\square$

1.6.2 Théorème de Baire

Théorème 190 (Théorème de Baire) *Soit X un espace topologique. Si X est localement compact, ou s'il est métrique complet, alors*
• Toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense
• Une réunion dénombrable de fermés recouvrant X comporte un fermé d'intérieur non vide

Démonstration : Il suffit de montrer la première assertion, la seconde étant équivalente par passage au complémentaire.
On se donne U_i une famille dénombrable d'ouverts avec $\overline{U_i} = X$. Soit V un ouvert non vide. On veut montrer que l'intersection des U_i a une intersection non vide avec V. On pose $V_0 = U_0 \cap V$ (ouvert non vide par densité de U_0). Ensuite, par récurrence :
• $\overline{V_n} \subset V_{n-1} \cap U_n$ pour $n \geq 1$
• Cas métrique complet : on impose $diam(V_n) \leq \frac{1}{2n}$
• Cas localement compact : $\overline{V_n}$ compact
L'intersection des $\overline{V_n}$ est non vide, car :
• Dans le cas localement compact, il s'agit d'une suite décroissante de compacts non vides.
• Dans le métrique complet, il s'agit d'une suite décroissante de parties non vides de diamètres tendant vers 0.
Il suffit alors de choisir un élément dans l'intersection des V_i.$\square$

Les lignes qui suivent fournissent de nombreuses applications du théorème de

Baire. Il y a aussi par exemple l'application 1.6.18.

Proposition 191 *Un espace de Banach de dimension infinie n'a pas de base algébrique dénombrable.*

Démonstration :
Supposons que E, espace de Banach de dimension infinie, ait une base dénombrable (e_n) pour $n \in \mathbb{N}$.
Définissons alors F_n, espace vectoriel engendré par les e_i pour $i \leq n$.
F_n est alors un fermé (car de dimension finie, résultat 130) et d'intérieur vide (facile). Or l'union des F_n est égale à E ; donc E devrait être d'intérieur vide grâce au théorème de Baire, ce qui est absurde.$\square$

Corollaire 192 $\mathbb{R}[X]$ *n'est de Banach pour aucune norme.*

Théorème 193 (Théorème de Banach-Steinhaus) *Soit $T_\alpha : E \to F$ une famille d'applications linéaires continues de l'espace de Banach E dans l'espace normé F. Si $\forall x\ sup_\alpha \parallel T_\alpha x \parallel < \infty$, alors $sup_\alpha \parallel T_\alpha \parallel < \infty$.*

On verra une application à la transformation de Toeplitz (proposition **??**), qui fournit une preuve élégante de la moyenne de Césaro (corollaire **??**).

Démonstration : On pose B_n l'ensemble des x tels que $\forall \alpha$ on a $\parallel T_\alpha(x) \parallel \leq n$
B_n est fermé. L'hypothèse permet de dire que l'union des B_n est E. Par le théorème de Baire, l'un des B_n est d'intérieur non vide. On en déduit facilement le résultat.$\square$

Corollaire 194 *Soit $T_n : E \to F$ une suite d'applications linéaires continues de l'espace de Banach E dans l'espace normé F. Si $T.x = lim_{n \to +\infty} T_n(x)$ existe pour tout x, alors T est une application linéaire continue.*

Démonstration : Facile.$\square$

Définition 195 (Application ouverte) *Une application est dite* **ouverte** *si l'image de tout ouvert est un ouvert.*

Théorème 196 (Théorème de l'application ouverte) *Une application linéaire continue surjective entre espaces de Banach est ouverte.*

<u>Démonstration :</u> Donnons nous une telle application f, entre deux espaces de Banach E et F. f est donc supposée linéaire, continue, et surjective. On montre qu'elle est ouverte.

• Soit U un ouvert de E. Il suffit de montrer que $f(U)$ est ouvert dans F.

• Soit x dans $f(U)$. Il suffit de montrer que $f(U)$ est un voisinage de x.

• Par translation, on peut supposer $x = 0$.

• Il suffit donc de montrer qu'une certaine boule $B_F(0, r)$ dans F centrée en 0 de rayon un certain $r > 0$ est incluse dans l'image par f d'une boule arbitraire $B_E(0, r')$ dans E, centrée en 0, de rayon r', avec r' tel que $B_E(0, r') \subset U$. Par linéarité de f, on peut se limiter à $r' = 1$. Il convient donc de montrer qu'il existe r tel que $B_F(0, r) \subset f(B_E(0, 1))$.

• Définissons, pour $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \overline{f(B_E(0, n))}$.

• D'après le théorème de Baire (ci-dessus), l'union des F_n étant égale à E, il existe un F_n d'intérieur non vide. Du coup, F_1, par linéarité, est lui-même d'intérieur non vide.

• Il existe donc une boule $B_F(y, \epsilon)$ centrée en y de rayon $\epsilon > 0$ incluse dans F_1.

• Par symétrie $-y \in F_1$. Finalement, $B_F(y, \epsilon) - y \subset F_1 + F_1$, donc $B_F(0, \epsilon) \subset F_2$ ($F_1 + F_1 = F_2$ comme on s'en convaincra aisément).

• $B_F(0, \frac{\epsilon}{2}) \subset F_1$, d'où le résultat. □

Corollaire 197 (Théorème d'isomorphisme de Banach) *Une application continue linéaire bijective entre espaces de Banach a un inverse continu ($\rightarrow$est un isomorphisme).*

<u>Démonstration :</u> Conséquence immédiate du théorème de l'application ouverte.□

Voir par exemple le théorème **??**, utilisant aussi le théorème de Riesz et le théorème d'Arzéla-Ascoli.

Corollaire 198 *Si E muni de la norme N_1 est un Banach et si E muni de la norme N_2 est un Banach, alors si $N_1 \leq \lambda.N_2$ pour un certain λ implique $N_2 \leq \mu N_1$ pour un certain μ. Donc si une des deux normes est plus fine que l'autre, alors elles sont équivalentes.*

<u>Démonstration :</u> L'identité de (E, N_2) dans (E, N_1) est continue, bijective, linéaire ; donc c'est un isomorphisme.□

Corollaire 199 (Théorème du graphe fermé) *Soit $T : E \to F$, linéaire entre les Banach E et F. L'application T est continue si et seulement si le graphe de T est fermé dans $E \times F$.*

Démonstration : Un sens ne pose pas de problème ; le graphe d'une application continue est toujours fermé.
Réciproquement, supposons le graphe fermé, voir figure 1.6.
• L'espace $E \times F$ est en fait un espace de Banach.
• Le graphe est en fait un Banach (la linéarité de T permet de conclure que le graphe est en fait un espace vectoriel, qui est fermé par hypothèse).
• La projection du graphe sur E restreinte au graphe est une application linéaire bijective du graphe sur E ; par le corollaire 197, son inverse est aussi continue. La projection du graphe sur F est aussi continue.
• La fonction considérée, composition de deux fonctions continues, est donc continue.□

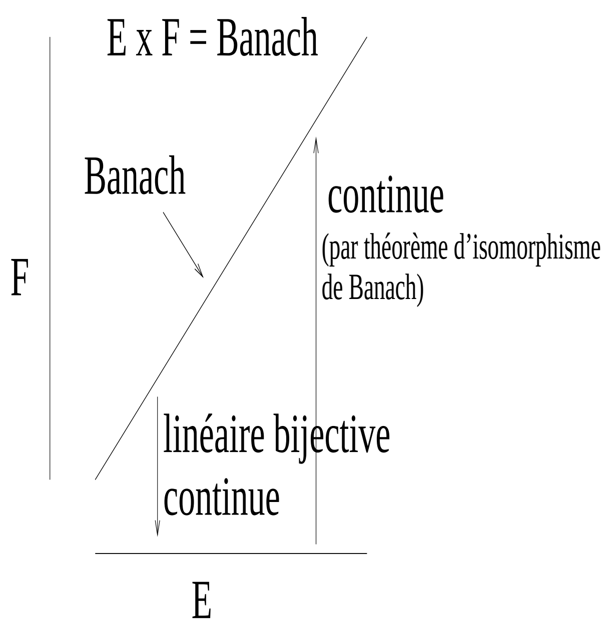

FIG. 1.6 – Schéma explicatif de la preuve du théorème du graphe fermé.

1.6.3 Distance d'un point à une partie

Proposition 200 *Soit A une partie non vide d'un espace métrique (E, d). L'application $\tilde{d}$ qui à x dans E associe $d(x, A) = inf\{d(x, a)/a \in A\}$ est continue et* 1*-lipschitzienne.*

Cette proposition servira un peu partout, par exemple pour le lemme **??** (très utile pour approximer des fonctions par des fonctions C^∞), ou pour le lemme 202, ou pour voir que les ϵ-voisinages sont ouverts.

Démonstration : Soit x dans E, montrons que $\tilde{d}$ est continue en x. Considérons t dans E, et donnons nous $\epsilon > 0$ (figure 1.7).

Par définition de $\tilde{d}$ et de l'inf, il existe $a \in A$ tel que $d(x, a) \leq d(x, A) + \epsilon$. Alors $d(t, A) \leq d(t, x) + d(x, a) \leq d(t, x) + d(x, A) + \epsilon$, donc $\tilde{d}(t) \leq \tilde{d}(x) + d(t, x) + \epsilon$. En faisant tendre ϵ vers 0 on obtient $\tilde{d}(t) \leq \tilde{d}(x) + d(x, t)$. De même on aurait $\tilde{d}(x) \leq \tilde{d}(t) + d(x, y)$. Donc

$$|\tilde{d}(x) - \tilde{d}(t)| \leq d(x, t)$$

On en déduit la continuité et le caractère 1-lipschitzien de $\tilde{d}$.$\square$

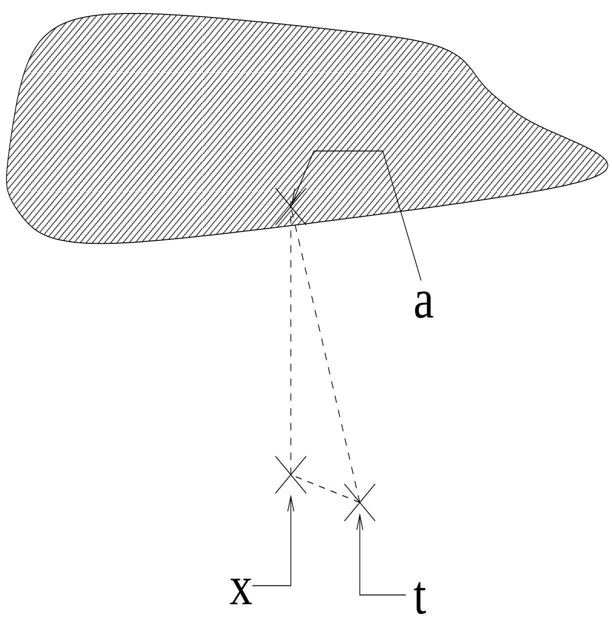

FIG. 1.7 – Continuité de la distance à une partie : une simple application de l'inégalité triangulaire.

Corollaire 201 *La distance entre un compact et un fermé disjoints est* > 0.

par distance entre un compact et un fermé on entend l'$\inf$ de la distance entre un point du compact et un point du fermé.

Démonstration : La distance à un ensemble étant continue, la distance d'un point du compact au fermé atteint son minimum sur le compact (voir 123). Si la distance est nulle, alors elle est nulle en un certain point x du compact. On prend alors une suite x_n du fermé tendant vers x (par exemple $d(x_n, x) < 1/n$) ; sa limite est nécessairement dans le fermé, donc x est à l'intersection du fermé et du compact, donc ces deux ensembles ne sont pas disjoints. D'où la contradiction, et le résultat.□

La distance entre deux fermés disjoints n'est pas nécessairement non nulle ! Considérer dans $\mathbb{R}$ les fermés F_1 et F_2 définis par

$$F_1 = \mathbb{N}$$

$$F_2 = \{\frac{n+1}{n} / n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2\}$$

1.6.4 Approximation d'ouverts par des compacts

Lemme 202 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour $m \geq 1$, notons K_m l'intersection de*

$$\{x \in U / d(x, U^c) \geq \frac{1}{m}\}$$

et de

$$\overline{B}(0, m)$$

Alors :
- *Pour tout $m > 0$ K_m est compact*
- $K_m \subset Int(K_{m+1})$
- $U = \cup_i K_i$
- $\forall K$ *compact de* U $\exists m / K \subset K_m$

Ce résultat servira par exemple pour le corollaire **??**, ou pour l'utilisation de la définition **??**, ou pour la proposition **??**.

Démonstration : • K_m est borné (clairement), K_m est une intersection de deux fermés (rappelons que pour une partie non vide donnée l'application qui à un point associe sa distance à cette partie est continue, voir proposition 200). Un fermé borné de $\mathbb{R}^n$ est compact (corollaire 128).

• Il suffit de voir que l'intérieur d'une intersection finie est l'intersection des intérieurs.

• La distance d'un point x de U au complémentaire de U est > 0 car le complémentaire de U est fermée (un point à distance nulle d'un fermé est dans ce fermé).

• Soit K un compact inclus dans U.

L'inf de la distance d'un point de K au complémentaire de U est > 0 grâce à un corollaire précédent. Donc cette distance est supérieure à $1/m$ pour m assez grand. Il suffit ensuite de prendre m assez grand pour que K soit inclus dans la boule fermé $\overline{B}(0, m)$.$\square$

Lemme 203 (Approximation d'ouverts du plan par des compacts pas trop troués) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ (on pourrait dire $\mathbb{R}^2$). Alors il existe une suite de compacts K_n inclus dans Ω tels que :*
• $K_n \subset Int(K_{n+1})$
• *Tout compact de Ω est inclus dans un certain K_n*
• *Toute composante connexe de $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus K_n$ contient une composante connexe de $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \Omega$*

La dernière condition signifie simplement qu'il n'y a pas de "trous" superflus dans les K_n. La seconde condition implique que la réunion des K_n est Ω.

Démonstration : On utilise les mêmes K_n que dans la partie précédentes.

Le seul problème est de vérifier que la dernière condition est vérifiée.

On se donne donc C une composante connexe de $\hat{C} \setminus K_n$[6], et x appartenant à cette composante connexe.

Alors nécessairement $|x| > n$ ou $|x - f| < 1/n$ pour un certain f dans F, avec F le complémentaire de Ω.

Dans le cas $|x| > n$, alors les $\lambda.x$, pour λ réels ≥ 1, forment une demi-droite, qui unie à $\{\infty\}$, forme un connexe, inclus dans C, et intersectant une composante connexe de $\hat{C} \setminus \Omega$ (puisque $\infty \notin \Omega$!).

Dans le cas $|x - f| < 1/n$, le segment $[x, f]$ est inclus dans C, donc C contient f, et donc intersecte $\hat{C} \setminus \Omega$, au moins en f.

D'où le résultat.$\square$

1.6.5 Homéomorphisme entre une boule fermée et un compact convexe d'intérieur non vide

Proposition 204 *Soit K un compact convexe d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Alors K est homéomorphe à la boule unité fermée.*

Démonstration :

• On peut supposer que 0 appartient à l'intérieur de K.

• On peut agrandir K jusqu'à ce qu'il contienne la boule unité fermée.

[6] $\hat{C}$ est le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{C}$ ($\mathbb{C} \cup \{\infty\}$)

• On définit la fonction f de la boule dans K qui à x associe $T.x$ avec T le sup des $t \in \mathbb{R}^+$ tels que $t.u$ appartient à K, avec u le vecteur directeur de x ($x/\|x\|$). On définit $f(0) = 0$.

• Montrons tout d'abord que f est bien définie. Si x est non nul, K étant borné, le sup des t en question est bien défini si x est non nul (le cas $f(0)$ étant séparé).

• $t.u$ appartient à K pour tout $t < T$, par convexité de K. Le fait que K est fermé fait que $T.u$ appartient à K. Si x est de norme 1, le problème est donc résolu. Si x est de norme plus petite que 1, a fortiori, $T.x$ appartient à K par convexité de K.

• Il faut maintenant montrer que f est continue.

• f est continue en 0. En effet il est clair que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

• Il convient maintenant de montrer que f est continue en x autre que 0. Pour cela il suffira de montrer que la fonction qui à u associe T le sup des $t \in \mathbb{R}^+$ tels que $t.u$ appartient à K est continue sur la sphère (ensuite il est clair que la multiplication par un scalaire est continue, que la fonction qui à un vecteur associe son vecteur directeur est continue (par quotient $x/\|x\|$).

• La figure 1.8 parle d'elle même.□

Cela permet d'appliquer des triangulations sur la boule unité fermée (enfin sur un simplexe homéomorphe à la boule), voir théorème 253.

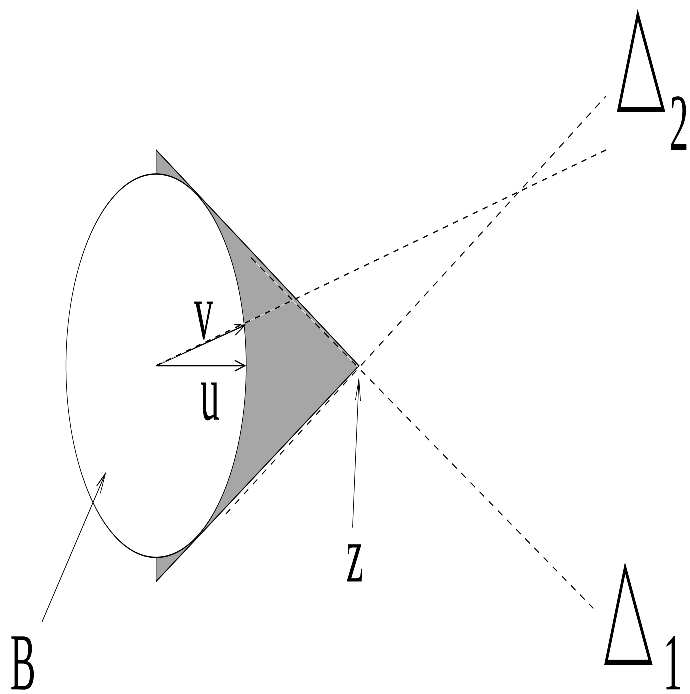

FIG. 1.8 – Par hypothèse, la boule B est incluse dans K. On se donne z le point $f(u)$, c'est à dire le "bord" de K dans la direction u. Alors la zone grisée appartient nécessairement à K par convexité. $f(v)$ est alors nécessairement au delà de Δ_1 par convexité de K, et en deça de Δ_2, par définition de z. D'où la continuité de f.

1.6.6 Intersection vide d'une suite décroissante de fermés convexes non vides bornés d'un espace vectoriel normé

Sur $\mathbb{R}$ l'intersection d'une suite décroissante de convexes fermés bornés non vides ne saurait être vide. Dans le cas général il en est tout autrement.

• Soit E l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

• C'est un espace vectoriel normé pour la norme infinie. C'est même un espace de Banach.

• Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels dense dans $[0,1]$.

• Soit C_n l'ensemble des applications de E nulles en x_i pour tout i dans $[0,n]$, bornées par 2 et d'intégrale 1 sur $[0,1]$.

• Les C_n sont non vides, convexes, fermés, bornés, décroissants.

• L'intersection des C_n ne peut contenir que des fonctions nulles sur tous les rationnels, et continues, donc l'intersection des C_n ne peut pas contenir de fonction non nulle. Or L'intersection des C_n ne peut contenir que des fonctions d'intégrale 1.$\square$

1.6.7 Valeurs d'adhérence $\neq$ limites de suites extraites

Proposition 205 *L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite n'est pas nécessairement égal à l'ensemble des limites de sous-suites extraites.*

Démonstration : En effet, soit E l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$; on le munit de la topologie produit, c'est à dire de la topologie de la convergence simple (il est facile de vérifier que c'est pareil...).

• Un voisinage de la fonction nulle dans E est de la forme $\{f/\forall i\in[1,n]|f(x_i)|\leq \epsilon_i\}$ $(*)$, avec les ϵ_i positifs, et les x_i dans $[0,1]$.

• On considère les applications en dents de scie, égales à 0 en x_0, en x_1, en x_2, ... , en x_n, avec $x_i < x_{i+1}$, $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$; et affine entre x_i et $\frac{x_i+x_{i+1}}{2}$ et $\frac{x_i+x_{i+1}}{2}$ et x_{i+1}, avec $f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}) = 1$, avec les x_i rationnels.

• On peut clairement les énumérer, et donc il s'agit d'une suite.

• la suite nulle est clairement dans l'adhérence de cette suite (prendre un voisinage de la fonction nulle écrit sous la forme $(*)$, et regarder ce qu'il se passe.

• aucune suite extraite ne peut tendre simplement vers la fonction nulle, sinon le théorème de convergence dominée de Lebesgue permettrait de dire que l'intégrale de la fonction nulle est la limite de l'intégrale des fonctions de la suite - or toute fonction de notre suite a une intégrale $\frac{1}{2}$.$\square$

1.6.8 Les espaces projectifs

Proposition 206 *Les espaces projectifs sont compacts et connexes par arcs.*

On trouvera plus d'informations sur ce sujet dans la partie **??**.

1.6.9 Le cube de Hilbert

Définition 207 *On appelle* **cube de Hilbert** *l'espace produit* $[0,1]^{\mathbb{N}}$*, muni de la topologie produit (*$[0,1]$ *étant muni de la topologie usuelle sur les segments de réels).*

Propriétés :

• Le cube de Hilbert est connexe par arcs (considérer, étant donnés deux suites de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, l'application qui à t associe $(x_n+t.(y_n-x_n))_{n\in\mathbb{N}}$). Chaque composante étant continue, cette application est continue.

• Le cube de Hilbert est métrisable (considérer l'application qui à (x_n) et (y_n) associe $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|x_n-y_n|}{2^n}$.

• Le cube de Hilbert est compact ; par application du théorème de Tykhonov.

Théorème 208 *Tout espace métrique compact K est homéomorphe à un sous-espace topologique du cube de Hilbert.*

Démonstration :

• Etant donné $n\in\mathbb{N}$, on considère un recouvrement de K par des boules $b_{n,i}$ pour $i\in[1,t(n)]$, en nombre fini et de rayon $1/n$ (on peut toujours construire un recouvrement fini, en extrayant un recouvrement fini du recouvrement comportant TOUTES les boules de rayon $1/n$, via la compacité de K).

• On note $B_{n,i}$ la boule de même centre que $b_{n,i}$, mais de rayon double ($2/n$)

• On peut, par le lemme d'Urysohn **??**, trouver une fonction continue $f_{n,i}$ égale à 1 sur $b_{n,i}$, comprise entre 0 et 1, et nulle en dehors de la boule $B_{n,i}$.

• On peut alors construire l'application f qui à un point x de K associe

$$(f_{1,1}(x),...,f_{1,t(1)}(x),f_{2,1}(x),...,f_{2,t(2)}(x),...,f_{m,1}(x),...,f_{m,t(m)}(x)...),$$

qui est un élément du cube de Hilbert.

• Cette application est continue, puisque toutes ses composantes sont continues.

• Elle est injective, on l'a d'ailleurs un peu beaucoup construite pour ça.

• f de K dans $f(K)$ est alors une application continue bijective d'un espace compact dans un espace séparé ; ceci implique que f est un homéomorphisme, d'après le corollaire 121.$\square$

1.6.10 Fonction non continue vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires

Il suffit de considérer la fonction qui à un réel x associe $sin(1/x)$ si x est non nul et 0 sinon.

1.6.11 Tous les fermés de $\mathbb{R}^n$ s'expriment comme zéros de fonctions indéfiniment dérivables

⊡ Des fermés particuliers, le cas de la dimension 1

Lemme 209 *Il existe une fonction C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annule exactement sur* $]-\infty, 0]$.

Démonstration :
• On pose $f(x) = exp(-1/x)$ pour $x > 0$, $f(x) = 0$ sinon.
• Il est clair que f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.
• En 0 on peut facilement voir que toutes les dérivées sont nulles, car leurs limites sont nulles, puisqu'elles s'expriment comme produit d'une fraction rationnelle par un $exp(-1/x)$. □

Lemme 210 *Tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ s'exprime comme complémentaire de l'ensemble des zéros d'une fonction C^∞.*

Démonstration : • $]a, +\infty[$ ou $]-\infty, a[$: voir lemme précédent.
• $]a, b[$ est l'ensemble des zéros de $x \mapsto f(x-a).f(b-x)$.□

Lemme 211 *Tout fermé de $\mathbb{R}$ s'exprime comme ensemble des zéros d'une fonction C^∞.*

Démonstration :
• On note U le complémentaire du fermé à étudier.
• U est ouvert.
• U est réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints (preuve en vérifiant qu'il y a un rationnel dans toute composante connexe d'un ouvert)
• On note ϕ_n une fonction (voir lemme précédent) C^∞ qui s'annule exactement sur le complémentaire du n-ième intervalle de la partition ci-dessus.
• On note ϕ la somme des ϕ_n. Cette somme est bien définie car il y a au plus un des ϕ_n qui est non nul en un point donné.
• ϕ est indéfiniment dérivable, comme on s'en rend facilement compte en regardant ce qu'il se passe au voisinage d'un point donné - qui n'appartient qu'à un seul support de ϕ_n.□

⊡ Des fermés particuliers, le cas général : dimension quelconque

Lemme 212 *Soit B une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$; il existe une fonction C^∞ nulle partout sauf dans cette boule, où elle est* > 0.

Démonstration : On montre le résultat pour la boule unité ouverte, la généralisation étant évidente.

• Soit $f(x) = exp(-\frac{1}{1-\|x\|^2})$ pour x tel que $\|x\| < 1$, et $f(x) = 0$ sinon. La norme ici évoquée est la norme euclidienne.

• la situation étant invariante par rotation, on se contente de montrer que la fonction est C^∞ sur le premier axe (i.e. l'ensemble des $(x, 0, 0, ...0)$ pour x dans $\mathbb{R}$).

• Pour cela on montre que chaque dérivée partielle est C^∞.

• Tout d'abord dans le cas d'un point autre que 0 ou 1 :

- La dérivée partielle suivant un autre axe que le premier est clairement nulle, par symétrie du problème.

- La dérivée partielle suivant le premier axe est clairement C^∞, comme composée d'applications C^∞, voir le lemme 210.

• Et en zéro, il suffit de voir que le carré de la norme euclidienne est une fonction polynômiale, donc C^∞.

• Le cas 1 se traite facilement, comme dans le lemme 209.□

Lemme 213 *Tout ouvert s'écrit comme réunion dénombrable de boules ouvertes.*

Démonstration :

• On considère la suite x_n des points à coordonnées rationnelles de U, un ouvert.

• Pour tout x_n, on définit r_n le sup des r tels que $B(x_n, r) \subset U$.

• r_n est bien positif strictement, puisque U est ouvert.

• Il est clair que tout rationnel de U est inclus dans la réunion des $B(x_n, r)$.

• Tout point x est inclus dans une boule centrée sur x de rayon ϵ incluse dans U ; donc une boule centrée sur un rationnel situé à une distance au plus $\epsilon/3$ de x et de rayon maximal va contenir x. En effet

• Des deux • précédents, on déduit donc que notre ouvert s'exprime comme réunion dénombrable de boules ouvertes.□

Théorème 214 (Le résultat tant attendu) *Tout fermé de $\mathbb{R}^n$ s'exprime comme zéro d'une fonction C^∞.*

Démonstration : • Soit F un fermé. On considère U son complémentaire. On écrit U comme une réunion dénombrable de boules ouvertes B_n.

• On fait alors une somme pondérée de fonctions comme définies dans le lemme 212. Avec ϕ la fonction donnée par le lemme 212 pour la boule unité, on peut écrire cette somme comme $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi(2\frac{x-x_i}{r_i}$.

• Il faut maintenant parvenir à sommer la n-ième fonction pondérée par le terme (strictement positif) nécessaire pour ramener toutes ses dérivées en dessous de $1/2^n$ fois une constante ne dépendant que de l'ordre de la dérivée ; ainsi on aura convergence normale de toutes les dérivées et donc la somme sera C^∞. La difficulté est que contrairement au cas de la dimension 1, les boules ne sont pas disjointes.

• Il est suffisant pour cela que la somme des c_i/r_i^k soit convergente. En effet, dans ce cas la dérivée k-ième de $c_i\phi(\frac{x-x_i}{r_i}$ sera majorée par la borne sur la dérivée k-ième de ϕ, divisée par r_i^k.

• Il suffit de choisir $c_i = e^{-\frac{1}{r_i}}.2^{-i}$; ainsi $\sum c_i/r_i^k = \sum 2^{-i}.e^{-\frac{1}{r_i}}/r_i^k \leq \sum 2^{-i}.M_k$ avec M_k le sup de $x^k.e^{-\frac{1}{x}}$.$\square$

1.6.12 Le compactifié d'Alexandrov

On se donne X un espace topologique séparé, non compact, localement compact. L'objectif va être de construire un espace $\tilde{X}$ à peine plus gros que X, qui lui sera compact, et qui contient un sous-espace topologique homéomorphe à X.

On pose $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$. On définit $\mathcal{T}$ l'ensemble constitué :

- des ouverts de X

- des $\tilde{X} \setminus K$, où K est un compact de X.

• Il est facile de vérifier que $\mathcal{T}$ est une topologie. L'ensemble des ouverts de X est bien stable par intersection finie et par réunion quelconque ; et l'ensemble des complémentaires de compacts de X dans $\tilde{X}$ est bien lui aussi stable par intersections finies et réunion quelconques (rappelons qu'une réunion finie de compacts est compacte et qu'une intersection quelconque de compacts est compact - comme fermé d'un compact) ; il suffit donc de vérifier que la réunion (resp. l'intersection) d'un ouvert de X et d'un complémentaire de compact de X est bien un ouvert de X ou un complémentaire de compact de X.

Pour cela soit U un ouvert de X, et K un compact de X, de complémentaire V. $U \cap V$ est l'intersection d'un ouvert avec $V \setminus K$ qui est un ouvert ; donc c'est un ouvert de X. Et $U \cup V$ est le complémentaire de $K \cap U'$, avec U' le complémentaire de U dans $\tilde{X}$.

• Montrons que X est dense dans $\tilde{X}$. Pour le voir il suffit de voir que tout voisinage de ∞ intersecte X ; ce qui est clair car $\underline{X \text{ n'est pas compact}}$[7].

• On va maintenant montrer que X est homéomorphe à un sous-espace de $\tilde{X}$. L'identité de X dans $\tilde{X}$ est injective. Les ouverts de $\tilde{X}$ inclus dans X étant exactement les ouverts de X, il est clair qu'il s'agit bien d'un homéomorphisme.

• Montrons maintenant que $\tilde{X}$ est séparé (premier pas pour montrer qu'il est compact). On peut séparer deux points de X par des ouverts, puisque $\underline{X \text{ est séparé}}$. Montrons maintenant qu'on peut séparer un point $x \in X$ de ∞. On se donne pour cela K un voisinage compact de x, ce qui peut se faire puisque $\underline{X \text{ est localement compact}}$. $IntK$ et $\tilde{X} \setminus K$ sont des ouverts séparant x et ∞.

• Montrons maintenant que $\tilde{X}$ vérifie la propriété de Borel-Lebesgue, c'est à dire que de tout recouvrement d'ouverts de $\tilde{X}$ on peut extraire un recouvrement fini. Soit $X = \cup_{i \in I} U_i$, avec les U_i ouverts. Un certain U_{i_0} contient ∞. Son complémentaire est compact, et recouvert par les U_j, pour $j \neq i_0$; on peut donc le recouvrir par les U_j, pour $j \in J$ fini. L'ensemble des U_i pour $i \in J \cup \{i_0\}$ est un recouvrement fini de $\tilde{X}$.

[7] Je souligne de temps à autre les endroits où s'appliquent les hypothèses

Exemple : $\tilde{\mathbb{R}^n}$ est homéomorphe à la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ [8].

Théorème 215 (Compactifié d'Alexandrov) *Si X est un espace topologique non compact et localement compact, il existe un espace topologique $\tilde{X}$ compact appelé* **compactifié d'Alexandrov** *de X et tel que :*
• X est dense dans $\tilde{X}$. • X est homéomorphe à un sous espace topologique de $\tilde{X}$.

1.6.13 Le cantor K_3

Définition 216 (Cantor K_3) *On note C_0 l'ensemble $[0,1]$.*
On note C_1 l'ensemble $[0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]$.
On note C_2 l'ensemble $[0,\frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9},\frac{3}{9}] \ \cup \ [\frac{6}{9},\frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9},\frac{9}{9}]$
...
On note C_n l'ensemble $\frac{1}{3}.C_{n-1} \cup (C_{n-1}+2).\frac{1}{3}$.

On note K_3 l'intersection des C_n, pour $n \in \mathbb{N}$. On appelle cet ensemble **ensemble triadique de Cantor**.
On le munit d'une topologie en considérant la restriction de la distance usuelle à K_3.

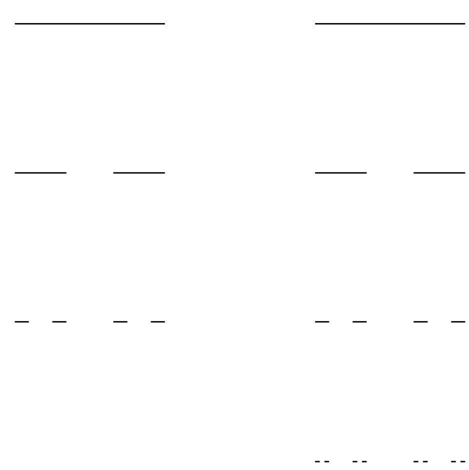

FIG. 1.9 – Construction de l'ensemble de Cantor. Les lignes successives représentent C_1, C_2, C_3, C_4.

[8]Cette sphère est de dimension topologique n.

Proposition 217 *L'ensemble triadique de Cantor K_3 est aussi l'ensemble des réels de $[0,1]$ dont le développement 3-adique ne comporte que des 0 ou des 2.*

Démonstration : Cela se prouve facilement en considérant l'intersection des C_i jusqu'à un certain rang, et en prenant la limite en l'infini.$\square$

Proposition 218 *L'ensemble triadique de Cantor K_3 est compact.*

Démonstration : K_3 est fermé, car c'est une intersection de fermés, et borné car inclus dans $[0,1]$. Donc il est compact, comme tout fermé borné de $\mathbb{R}$.$\square$

Proposition 219 *L'ensemble triadique de Cantor K_3 est de mesure nulle et d'intérieur vide.*

Démonstration : K_3 est mesurable, comme intersection dénombrable de fermé. La mesure de K_3 est inférieure à la mesure de C_n, pour tout n ; donc K_3 est de mesure nulle. K_3 est d'intérieur vide, sinon il ne serait pas de mesure nulle.$\square$

Proposition 220 *L'ensemble triadique de Cantor K_3 est homéomorphe à $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, ensemble des suites de $\{0,1\}$, muni de la topologie produit de la topologie discrète sur $\{0,1\}$.*

Démonstration : Soit la fonction f qui à une suite u_n de $\{0,1\}$ associe la somme des $2.u_n/3^n$. Cette fonction est injective, clairement. Elle est surjective (proposition 217). Voyons maintenant la continuité de f ; en fait on va considérer la continuité de f^{-1}. Pour cela on considère l'image réciproque d'un ouvert non vide de la base d'ouverts de la topologie produit constituée des produits d'ouverts tels qu'un nombre fini d'ouverts seulement soient différents de $\{0,1\}$. Il est suffisant pour que l'image réciproque de x soit dans cet ouvert que les premiers chiffres soient les mêmes, et donc que la distance soit suffisamment petite.
Enfin toute fonction continue bijective d'un compact dans un séparé est un homéomorphisme (d'après le corollaire 121), ce qui permet de conclure.$\square$

Proposition 221 *L'ensemble triadique de Cantor K_3 est* **totalement discontinu***, ce qui signifie que la composante connexe d'un point est réduite à ce point.*

Il suffit de montrer qu'étant donnés x et y dans K_3, il existe deux ouverts fermés disjoints contenant l'un x et l'autre y. En effet ainsi la composante connexe de x sera différente de la composante connexe de y.
Pour cela on peut considérer indifférement K_3 comme le produit $\{0,1\}^n$ ou comme l'intersection des C_n ; dans le premier cas il suffit de considérer le premier rang auquel les deux suites diffèrent, dans le deuxième cas, le premier chiffre dans le développement triadique pour lequel x et y diffèrent.□

Proposition 222 *L'ensemble triadique de Cantor K_3 ne comporte pas de point isolé.*

On note qu'un ensemble **parfait** est un ensemble fermé et dépourvu de point isolé. K_3 sera donc un ensemble parfait.
Démonstration : Facile, soit en considérant un ouvert de la base d'ouverts dans le cas du produit $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, soit en considérant l'intersection d'une boule ouverte avec K_3 dans le cas de l'intersection des C_n (bien entendu, une seule de ces deux preuves suffit !).□

Proposition 223 *K_3 et $\emptyset$ sont les deux seuls compacts K inclus dans $[0,1]$ qui vérifient*

$$K.\frac{1}{3} \cup (K.\frac{1}{3} + \frac{2}{3}) = K$$

Démonstration : Il est facile de vérifier que $\emptyset$ et K_3 sont des solutions de l'équation donnée.
On considère maintenant l'ensemble $K([0,1])$ des compacts non vides inclus dans $[0,1]$, et l'application f qui à un compact K associe $K.\frac{1}{3} + K.\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$.
Cette application associe bien un compact inclus dans $[0,1]$ à un compact inclus dans $[0,1]$. On va considérer un compact A donné, non vide, et on va montrer que $f^n(A)$ tend vers K_3 pour la distance de Hausdorff.

Définition 224 (Définition de la distance de Hausdorff) *On définit tout d'abord :*

$$V_\epsilon(A) = \{x | d(x, A) < \epsilon\}$$

$V_\epsilon(A)$ est appelé **ϵ-voisinage ouvert de** *A. Il est ouvert par la proposition 200. Ensuite on note $D(A, B)$ et on appelle* **distance de Hausdorff** *le réel*

$$D(A, B) = inf\{x/A \subset V_x(B) \wedge B \subset V_x(A)\}$$

défini sur l'ensemble $K(E)$ des compacts non vides d'un espace métrique E donné.

Il s'agit bien d'une distance ;
• $D(A, B) >= 0$ et $D(A, B) < \infty$ est clair
• $D(A, B) = 0 \rightarrow A = B$ est clair
• l'inégalité triangulaire se vérifie facilement

Proposition 225 *Si E est un espace métrique complet, alors l'ensemble des compacts non vides de E muni de la distance de Hausdorff est complet.*

Démonstration : Soit K_n une suite de Cauchy dans l'ensemble des compacts non vides de E.
Alors il existe une suite $\epsilon_N \rightarrow 0$ telle que

$$\forall k, n > N \ D(K_k, K_n) < \epsilon_N$$

et donc

$$\forall k, n > N \ K_k \subset V_{\epsilon_N}(K_n)$$

On considère alors K l'ensemble des x tels qu'il existe une suite x_n telle que $x_n \in K_n$ et x_n admet x pour valeur d'adhérence.
K est fermé. En effet :
- soit y_∞ dans $\overline{K}$. Il existe (y_m) suite dans K tendant vers y_∞.
- y_m est limite d'une certaine suite d'éléments x_n tels que $x_n \in K_n$. On considère une suite extraite x_{n_m} telle que $d(x_{n_m}, y_m) \rightarrow 0$ comme $m \rightarrow \infty$. On définit x_n pour n n'appartenant pas à l'ensemble des n_m, en le choisissant de manière quelconque dans K_n.
Alors

$$d(x_{n_m}, y_\infty) \leq d(y_m, y_\infty) + d(x_{n,m}, y_m) \rightarrow 0$$

Donc y_∞ est valeur d'adhérence des x_n, donc $y_\infty \in K$. D'où $\overline{K} \subset K$, et donc K est fermé. Fermé d'un complet, il est donc aussi complet.

K est aussi précompact. En effet : - Soit $\epsilon > 0$.
- Il existe clairement N tel que K soit inclus dans $V_\epsilon(K_N)$.
- pour tout y dans K, il existe x_y dans K_N tel que $d(y, x_y) < \epsilon$.

- On peut construire sur K_n (puisqu'il est compact) un recouvrement fini par des boules centrés sur les z_i de rayon ϵ.
- Les boules centrées sur les z_i de rayon 2ϵ recouvrent donc K. On peut supprimer les z_i inutiles, ie tels que $B(z_i, 2\epsilon) \cap K = \emptyset$. Il reste les z_i, pour, disons, $i \in [1, M]$.
- On peut alors déterminer, pour tout $i \in [1, M]$, un élément z'_i de K à distance $< 2\epsilon$ de z_i (puisqu'on a supprimé les z_i inutiles).
- Les boules centrées sur les z'_i et de rayon 4ϵ montrent alors que K est précompact.
Précompact et complet, K est donc compact (voir théorème 110).

Il convient de montrer que K est non vide, ce qui sera fait en même temps que la preuve de la convergence des K_n ci-dessous (en effet K_n sera inclus dans $V_\epsilon(K)$).
K est limite des K_n pour la distance de Hausdorff ; pour le montrer il faut voir que pour tout ϵ il existe un N tel que pour $n \geq N$ on ait
• $K \subset V_\epsilon(K_n)$ (trivial)
• $K_n \subset V_\epsilon(K)$: pour cela on considère x dans K_n, avec n tel que $\epsilon_n \leq \epsilon$.
On considère alors
• $n_0 > n$ tel que $\epsilon_{n_0} \leq \epsilon/2^1$, et x_{n_0} dans K_{n_0}, tel que $d(x, x_{n_0}) \leq \epsilon/2^0$
• $n_1 > n_0$ tel que $\epsilon_{n_1} \leq \epsilon/2^2$, et x_{n_1} dans K_{n_1}, tel que $d(x_{n_0}, x_{n_1}) \leq \epsilon/2^1$
• $n_2 > n_1$ tel que $\epsilon_{n_2} \leq \epsilon/2^3$, et x_{n_2} dans K_{n_2}, tel que $d(x_{n_1}, x_{n_2} \leq \epsilon/2^2$
...
• $n_p > n_{p-1}$ tel que $\epsilon_{n_p} \leq \epsilon/2^{p+1}$, et x_p dans K_{n_p}, tel que $d(x_{n_{p-1}}, x_{n_p}) \leq \epsilon/2^p$
...
La suite des x_{n_p} est de Cauchy, donc elle converge vers un certain y ; en sommant les distances ont montre facilement que $d(x, y) \leq 2.\epsilon$. Pour compléter la suite des x_n pour $n_p \leq n \leq n_{p+1}$, il suffit de prendre un point quelconque dans K_n.□
On peut maintenant terminer notre démonstration sur le fait que K_3 est le seul compact non vide tel que $K_3 = f(K_3)$.
On montre facilement que f est contractante de rapport $\frac{1}{3}$ pour la distance de Hausdorff. On peut donc conclure par le théorème du point fixe **??** ; K est le seul compact non vide satisfaisant à l'équation.□

Une autre propriété est le fait que pour E métrique compact, $K(E)$ est compact.

On peut utiliser le Cantor triadique K_3 pour construire une fonction continue, croissante, dérivable presque partout, de dérivée nulle presque partout, et poutant non constante (égale à 0 en 0 et à 1 en 1).

1.6.14 Une distance sur les sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

On se donne E un espace vectoriel de dimension finie n. On appelle S l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E. Alors on définit la distance d sur S par

$$d(F, G) = dim(F + G) - dim(F \cap G)$$

Définition 226 *Cette distance est appelée* **distance de Grassman***.*

Proposition 227 *La distance de Grassman bien une distance.*

Démonstration : En effet :
• d est bien positive (facile)
• d est symétrique (encore plus facile)
• $d(F,G) = 0$ implique $dim\ F \cap G = dim\ F + G$ or $F \cap G \subset F \subset F + G$ et donc $F \cap G = F$ et donc $F \subset G$; de même on obtiendrait $G \subset F$; et donc au final $F = G$.
• Il reste à montrer l'inégalité triangulaire. Pour cela on aura besoin de la définition suivante :

Définition 228 *On appelle* **chaîne entre les sous-espaces vectoriels** F **et** G *une suite finie de sous-espaces vectoriels , le premier étant F, le dernier étant G, et chaque élément de la chaîne étant un hyperplan du sous-espace vectoriel suivant, ou au contraire le sous-espace vectoriel suivant étant un hyperplan de ce sous-espace vectoriel ; formellement cela signifie qu'il existe $F_1, ..., F_p$ tels que $F = F_1$, $G = F_p$, et pour tout $i \in [1, p-1]$, F_i est un hyperplan de F_{i+1} ou F_{i+1} est un hyperplan de F_i.*
p est appelé **longueur de la chaîne***.*

On procède par étapes :
- Si $F \subset G$, il y a entre F et G une chaîne de longueur $dim\ G - dim\ F$.
- Dans le cas général il y a entre F et G une chaîne de longueur $d(F,G)$ (facile en passant par l'espace $F \cap G$ - il suffit de se rappeler que $dim\ F + G = dim\ F + dim\ G - dim\ F \cap G$). On va maintenant se préoccuper de montrer que cette chaîne est de longueur minimale.
- Si on a une chaîne A, B, C, avec A et C hyperplans de B (c'est-à-dire que B est le plus grand de nos 3 éléments A, B et C), alors on a aussi une chaîne $A, A \cap C, C$, à moins que $A = C$.
- Si on a une chaîne, on peut la remplacer par une chaîne de même longueur entre les deux mêmes sous-espaces vectoriels et de manière à avoir des inclusions décroissantes puis croissantes.
- la longueur d'une chaîne entre F et G est au moins $d(F,G)$. On sait donc, avec le résultat obtenu plus haut, que $d(F,G)$ est la longueur minimale d'une chaîne entre F et G. On peut remarquer qu'on aurait pu raisonner de même en utilisant une chaîne croissante puis décroissante en passant par $F+G$ au lieu de décroissante puis croissante en passant par $F \cap G$.

- l'inégalité triangulaire en résulte aisément.□

Proposition 229 *Pour la distance de Grassman, tout isomorphisme algébrique est une isométrie.*

Démonstration : Facile, puisque la distance de Grassman ne dépend que de dimension d'espaces, qui est préservé par isomorphisme algébrique.□

1.6.15 Topologie et approximation de fonctions caractéristiques

On consultera la partie **??** (et les parties suivantes pour des applications).

1.6.16 Points fixes

Point fixe d'un endomorphisme dans un compact convexe

Lemme 230 *Soit K un compact convexe d'un espace vectoriel normé E, et f un endomorphisme continu de E tel que $f(K) \subset K$; alors il existe $x \in K$ tel que $f(x) = x$.*

Démonstration :
• On se donne $x_0 \in K$, et on définit la suite (x_n) par $x_{n+1} = f(x_n)$.
• On définit alors $y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_n$; $y_n \in K$ par convexité de K.
• Par compacité de K, on peut extraire une suite convergente de la suite des (y_n) (puisque E est un espace vectoriel normé , donc un espace métrique, le théorème de Bolzano-Weierstrass 140 s'applique).
• Soit y la limite de cette suite.
• $f(y_n) - y_n = \frac{x_n - x_0}{n}$; la suite (x_n) étant bornée (puisque $\underline{K \text{ est compact dans un métrique}}$) et en passant à la limite $\underline{\text{puisque } f \text{ est continue}}$ $f(y) = y$.□

Un théorème de point fixe dans un espace de Hilbert

Ce résultat est directement inspiré de la note "Un théorème de point fixe en dimension finie : application aux sous-groupes compacts de $\mathbb{R}^n$", de Richard Antetomaso, dans la 104ème intégrale de la Revue de Maths Spé, 1993-1994.

Théorème 231 *On se donne H un espace de Hilbert, et K un compact convexe non vide de H, et un sous-groupe compact G de l'ensemble des automorphismes de H (qui sont aussi des homéomorphismes). On suppose que pour tout g dans G, $g(K) \subset K$. Alors il existe a appartenant à H point fixe commun, ie tel que $\forall g \in G, g(a) = a$.*

Il faut bien comprendre pour quelle topologie G est compact. Il s'agit de la topologie produit de H^H.

Démonstration :

• On définit sur H une norme $\|.\|'$ définie par

$$\|x\|' = \sup\{\|g(x)\|/g \in G\}$$

Cette norme est bien définie et à valeurs finies, car G est compact ; utiliser le corollaire 123 avec la fonction qui à g associe $\|g(x)\|$.

• Montrons qu'il s'agit bien d'une norme.

- $\|\lambda x\|' = \sup\{\|g(\lambda x)\|/g \in G\}$

$$= \sup\{\||\lambda|g(\lambda x)\|/g \in G\}$$

$$= |\lambda| \sup\{\|g(\lambda x)\|/g \in G\}$$

$$= |\lambda|\|g(x)\|'$$

- $\|x\|' = 0$ implique clairement $x = 0$.

- Enfin,

$$\|x + y\|'$$

$$= \sup\{\|g(x + y)\|/g \in G\}$$

$$= \|g_0(x + y)\|$$

$$\leq \|g_0(x)\| + \|g_0(y)\|$$

$$\leq \|x\|' + \|y\|'$$

car par hypothèse G est compact et une fonction continue sur un compact atteint ses bornes (voir corollaire 123).

Le cas d'égalité est atteint si $\|g_0(x)\| + \|g_0(y)\| = \|g_0(x + y)\|$, donc si $g_0(x)$ et $g_0(y)$ sont positivement liés (car H est un espace de Hilbert), donc si x et y sont positivement liés puisque g_0 est un automorphisme (les éléments de G sont des automorphismes). Cela signifie précisément que notre norme est strictement convexe.

• Supposons maintenant que $\forall x \exists g \in G/g(x) \neq x$.

• Considérons, pour $g \in G$, l'ensemble Ω_g des éléments de x de K tels que $g(x) \neq x$.

• $\forall g \Omega_g$ est ouvert, puisque g, l'identité, et l'addition sont continues (g est continue par hypothèse, l'identité est continue[9], et voir la proposition 104 pour vérifier que l'addition est bien continue).

• Les Ω_g recouvrent K (c'est ce qu'on a supposé ci-dessus).

• Par définition des compacts, et puisque K est compact, on peut extraire un recouvrement fini $K = \cup_{i \in [1,n]} \Omega_{g_i}$. On note que $n \geq 1$, car K est non vide.

[9] L'image réciproque de tout ouvert est bien un ouvert !

• On applique alors le lemme 230 à l'endomorphisme continu $x \mapsto \frac{1}{n}g_1(x)+\cdots+g_n(x)$ (de K dans K, bien défini par convexité de K), continue par continuité des g_i. On en déduit qu'il existe x tel que $nx = \sum_i g_i(x)$.

• On a alors $n\|x\|' \leq \sum_i \|g_i(x)\| = n\|x\|$ (car les g_i sont des isométries et car les isomorphismes d'espaces de Hilbert sont des isométries.).

• On a montré plus haut que la norme était strictement convexe ; donc pour avoir le cas d'égalité ci-dessus il faut que les $g_i(x)$ soient positivement liés ; or ils ont tous même norme, puisque les g_i sont des isométries ; donc tous les $g_i(x)$ sont égaux.

• Du coup pour tout i dans $[1, n]$, $ng_i(x) = nx$; donc $g_i(x) = x$. D'où la contradiction ; x n'appartient pas à l'union des Ω_{g_i}, alors qu'il appartient à X, et que ces Ω_{g_i} recouvrent K.□

1.6.17 Cas particulier des espaces vectoriels normés de dimension finie

Voir **??**.

1.6.18 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est C^∞ et $\forall x \exists n / f^{(n)}(x) = 0$, alors f est polynomiale

Proposition 232 *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est C^∞ et $\forall x \exists n / f^{(n)}(x) = 0$, alors f est polynomiale.*

Cet exercice est extrait du livre [5] ; nous avons tâché de préciser un peu plus les détails de la preuve.

Démonstration : • On considère Ω l'ensemble des points au voisinage desquels f est polynomiale

• Ω est ouvert, car si $x \in \Omega$, alors il existe V ouvert contenant x dans lequel tout point y admet un voisinage sur lequel f est polynomiale : il s'agit simplement de l'ouvert V.

• Soit $]u, v[$ inclus dans Ω, alors il existe un polynôme P tel que f est égale à P sur $[u, v]$.

Pour le prouver on considère x_0 dans $]u, v[$, un couple (x_1, x_2) tel que $f = P$ sur $]x_1, x_2[$ et $x_1 < x_0 < x_2$, et l'ensemble J des $x \in]x_0, v[$ tels que $f = P$ sur $]x_0, x[$; J est non vide car contenant x_2 ; il est fermé dans $]x_0, v[$ par continuité ; on montre facilement que si $x \in J$ alors $]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset J$ pour un certain ϵ ; donc J est ouvert dans $]x_0, v[$; donc $J =]x_0, v[$ par connexité. On a donc $f = P$ sur $]x_0, v[$, et de même on aurait $f = P$ sur $]u, x_0[$.

• Soit F le complémentaire de Ω. F est fermé. Montrons qu'il ne comporte pas de point isolé. S'il comporte un point isolé a, on applique l'hypothèse et le développement de Taylor en a, et on en déduit une contradiction.

• On suppose F non vide pour arriver à une contradiction

• On définit F_n l'ensemble des $x \in F$ tels que $f^{(n)}(x) = 0$.

• On montre qu'il existe un intervalle ouvert non vide dont l'intersection avec F est incluse dans un certain F_{n_0}.

Les F_n sont fermés. Donc on applique le théorème de Baire 190 dans F ; il existe F_{n_0} d'intérieur non vide. On peut alors choisir un intervalle I ouvert d'intersection non vide avec F, et cette intersection est incluse dans F_{n_0}.
• $I \cap F \subset F_n \ \forall n \geq n_0$
En effet soit $a \in I \cap F$; a n'est pas isolé et est donc limite d'une suite a_p d'éléments de F différents de a. Il suffit alors d'écrire la dérivée pour constater que $a \in F_{n_0+1}$.
Par récurrence $I \cap F \subset F_n$ pour $n \geq n_0$.
• On montre maintenant que f_{n_0} est nulle sur toute composante connexe de $I \cap \Omega$.
Tout d'abord $I \cap \Omega$ est non vide, sinon $I \subset F$, puis $I \cap F = I$.
$I \cap \Omega$ est ouvert ; donc c'est une réunion disjointe d'intervalles ouverts. Soit $]u, v[$ une telle composante connexe. $f = P$ sur $[u, v]$. $]u, v[\neq I$ sinon $F \cap I = \emptyset$
Donc $u \in I$ ou $v \in I$; supposons $u \in I$. Alors $u \in I \cap F$, et $u \in F_n$ pour tout $n \geq n_0$.
Le degré de P est donc inférieur à n_0. Donc $f^{(n_0)} = 0$ sur $[u, v]$. Ca marche sur toutes les composantes connexes, donc $f^{(n_0)} = 0$ sur $I \cap \Omega$ mais aussi sur $I \cap F$. Donc $f^{(n_0)}$ est nulle sur I, donc f est un polynôme sur I donc $I \subset \Omega$, ce qui est impossible puisque $I \cap F \neq \emptyset$.$\square$

1.6.19 Les billards strictement convexes

Proposition 233 *Soit K un ensemble strictement convexe de $\mathbb{R}^2$; on suppose que par tout point de la frontière de K il passe une unique tangente à K. On définit une trajectoire périodique de période n par la donnée de n points $a_0, \ldots, a_{n-1}$ de la frontière de K tels que pour tout $i \in [0, n-1]$ $\theta_i = \theta_{i+1}$ (voir figure 1.10) en notant $a_n = a_0$.*
Alors pour tout $n \geq 2$ il existe des trajectoires périodiques de période n.

Démonstration :
• On se donne $n \geq 2$.
• Notons δK la frontière de K.
• On considère l'ensemble

$$\tilde{K} = \{(a_0, \ldots, a_{n-1}) / \forall i a_i \in \delta K\}$$

Il est égal à $(\delta K)^n$.
• On définit $f : \tilde{K} \to \mathbb{R}$ défini par

$$f(a) = \sum_{i=0}^{n-1} |a_i - a_{i-1}|$$

($|.|$ désigne ici la norme euclidienne)
• f est C^0 (par inégalité triangulaire)
• $\tilde{K}$ est compact (comme produit de compacts - s'agissant d'un produit fini d'espaces métriques il n'est pas nécessaire d'invoquer Tykhonov, voir le paragraphe qui suit le théorème 127).
• f atteint son maximum sur $\tilde{K}$.

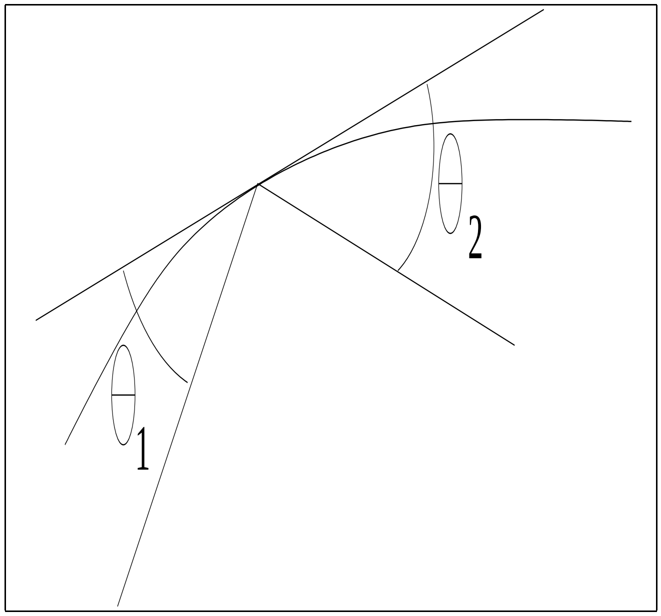

FIG. 1.10 – Illustration de la définition d'une trajectoire périodique

• Tout point où f atteint son maximum vérifie la propriété énoncée, comme le lecteur le vérifiera aisément.□

1.6.20 Deux jolies inégalités géométriques

On s'inspire ici de [4].

1.6.21 Inégalité isopérimétrique

Lemme 234 *On se donne Γ une fonction C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$. On suppose $\int_0^1 \Gamma = 0$. Alors*

$$4\Pi^2 \int_0^1 |\Gamma|^2 \leq \int_0^1 |\Gamma'|^2$$

et il n'y a égalité que si Γ est une combinaison linéaire de $e^{2i\Pi x}$ et $e^{-2i\Pi x}$.

Démonstration : On procède comme suit :
• On considère Γ sur $[0,1[$, et on considère sa série de Fourier.

$$\Gamma(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2i\Pi nx}$$

• On applique Parseval (théorème **??**) ;

$$\int_0^1 |\Gamma|^2 = \sum_n c_n^2$$

• On applique Parseval à la dérivée de Γ, $\Gamma'(x) = 2i\Pi \sum_n nc_n e^{2i\Pi nx}$

$$\int_0^1 |\Gamma'|^2 = 4\Pi^2 \sum_n (nc_n)^2$$

• On sait que $c_0 = 0$, car $\int_0^1 \Gamma = 0$.
• On a donc l'inégalité souhaitée, et le cas d'égalité.□

Théorème 235 (Inégalité isopérimétrique) *La courbe C^1 fermée du plan qui à longueur donnée délimite une aire maximale est le cercle.*

Démonstration :
• On se donne une courbe fermée C^1 Γ de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$.
• Quitte à reparamétrer, on suppose que Γ' est constant.
• Quitte à translater Γ on suppose que $\int \Gamma = 0$.
• On applique alors le théorème de Green-Riemann, qui affirme que l'aire A est donnée par la formule

$$A = \frac{1}{2} \int xy' - x'y$$

avec $\Gamma = x + iy$, et x et y à valeurs réelles.
• Or

$$\int \Gamma\overline{\Gamma'} = \int (x+iy).(x'-iy')$$
$$= \int xx' + yy' + iyx' - iy'x$$

or $\int xx' = \int yy' = 0$ par périodicité donc

$$\int \Gamma\overline{\Gamma'} = i \int yx' - y'x$$

et donc

$$2A \leq \sqrt{\int |\Gamma|^2}\sqrt{\int |\Gamma'|^2}$$
$$\leq \frac{1}{2\Pi} \int |\Gamma'|^2$$

grâce au lemme précédent. Or Γ' étant constant, on obtient

$$A \leq \frac{l^2}{4\Pi}$$

avec l la longueur de l'arc.

• Il y a égalité si et seulement si l'inégalité de Cauchy-Schwartz est en fait une égalité, et donc si et seulement si on a non seulement tous les c_i nuls sauf c_1 et c_{-1}, mais aussi Γ et Γ' liés ; la famille $(x \mapsto e^{2i\Pi x}, x \mapsto e^{-2i\Pi x})$ étant libre, on constate que les solutions se trouvent pour un des deux coefficients c_1 et c_{-1} nul, c'est-à-dire que Γ est un cercle.$\square$

1.6.22 Inégalité isodiamétrique

On considère l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure usuelle d'espace euclidien, et de la mesure de Lebesgue.

Théorème 236 *Quel que soit K compact de $\mathbb{R}^n$ de mesure finie, $\mu(K) \leq \mu(B(0, \delta(K)/2))$, avec $\delta(E)$ pour E une partie de $\mathbb{R}^n$ le diamètre de E, c'est à dire le $\sup$ des distances entre deux points de E.*

Cela revient à dire que le plus grand volume possible à diamètre donné est celui d'une boule.

Démonstration :

Nous aurons besoin de la définition suivante :

Définition 237 *Etant donné K un compact de $\mathbb{R}^n$, on appelle* **symétrisé de Steiner** *de K par rapport à l'hyperplan P l'ensemble*

$$S_P(K) = \{x = p + tu / p \in P \wedge D(p,u) \cap K \neq 0 \wedge |t| \leq \frac{1}{2}\mu'(K \cap D(p,u)\}$$

où u désigne un vecteur directeur unitaire de la droite orthogonale à P, et où $D(p,u)$ désigne la droite de vecteur unitaire u passant par p.
μ' désigne la mesure de Lebesgue sur la droite $D(p,u)$.

Lemme 238 (Première propriété fondamentale du symétrisé de Steiner) *Quel que soit K compact et P hyperplan, $S_P(K)$ a même mesure que K.*

Démonstration : Il suffit de considérer le théorème de Fubini, appliqué à la fonction caractéristique de K, pour voir que l'intégrale est l'intégrale sur $p \in P$ de la mesure $\mu'(K \cap D(p,u))$ (cette dernière quantité étant la mesure de $\{t \in \mathbb{R} / |t| \leq$

$\frac{1}{2}\mu'(K \cap D(p,u))\} \subset \mathbb{R}.\square$

Lemme 239 (Deuxième propriété fondamentale du symétrisé de Steiner) *Quel que soit K compact et P hyperplan, $S_P(K)$ a un diamètre inférieur ou égal à celui de K.*

Démonstration : On considère deux points x et y de $S_P(K)$, à une distance d l'un de l'autre ; on cherche à montrer qu'il existe deux points x' et y' de K à distance supérieure ou égale à d.

- On note x_P et y_P les projetés orthogonaux de x et y sur P.
- On note l_x et l_y les mesures de $K \cap D(x,u)$ et $K \cap D(y,u)$.
- On note d' la distance entre x_P et y_P.
- d^2 est majorée par $d'^2 + (l_x/2)^2 + (l_y/2)^2$.
- On note L_x et L_y les diamètres de $S_P(K) \cap D(x,u)$ et $S_P(K) \cap D(y,u)$.
- Il est clair que $L_x \geq l_x$ et que $L_y \geq l_y$. Une étude de cas montre rapidement qu'en considérant les points extrémaux x_1, x_2, y_1 et y_2 de $S_P(K) \cap D(x,u)$ et $S_P(K) \cap D(y,u)$ respectivement, l'une des distances $d(x_i, y_i)$ est supérieure ou égale à $\sqrt{d'^2 + (L_x/2)^2 + (L_y/2)^2}.\square$

On a encore besoin d'un nouveau lemme :

Lemme 240 (Symétrisation d'un compact de $\mathbb{R}^n$) *On note $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et P_1, ..., P_n les hyperplans orthogonaux aux e_i passant par 0. On se donne K un compact de $\mathbb{R}^n$.*
Alors $S_{P_1} \circ S_{P_2} \circ S_{P_3} \circ \cdots \circ S_{P_n}(K)$ est stable par $x \mapsto -x$.

Démonstration :

Il suffit de procéder tranquillement, par récurrence ; $S_{P_n}(K)$ est clairement invariant par symétrie par rapport à P_n, $S_{P_{n-1}}$ est clairement invariant par symétrie par rapport à P_{n-1}, et par rapport à P_n aussi car la symétrisation de Steiner par rapport à un hyperplan P ne perturbe pas les symétries par rapport à des hyperplans orthogonaux à P (vérification immédiate sur la formule !), et ainsi de suite... L'invariance par rapport aux symétries par rapport aux n hyperplans donnent aussi l'invariance par $x \mapsto -x.\square$

On peut maintenant finir la preuve du théorème, en se donnant un compact K quelconque, en lui associant un compact K' égal à $S_{P_1} \circ S_{P_2} \circ S_{P_3} \circ \cdots \circ S_{P_n}(K)$, qui, par les lemmes précédents, est invariant par symétrie par rapport à l'origine, et donc est inclus dans la boule $B(0, \delta(K')/2)$. Il ne reste qu'à appliquer les différents lemmes pour conclure...$\square$

1.6.23 Triangulations d'un simplexe - Lemme de Sperner - conséquences

On s'inspire ici du livre [4], en tâchant de donner une preuve plus détaillée.

Définition 241 *On appelle* **simplexe** *de dimension n l'enveloppe convexe de $n+1$ points formant un repère affine.*
On appelle **face d'un simplexe** *l'enveloppe convexe d'un nombre fini (quelconque) de ses points. Sa* **dimension** *est par définition le nombre de points de cette face moins 1. On appelle g*-**face** *une face de dimension g.*

Lemme 242 *Tout élément P appartenant à un simplexe Δ est décrit de manière unique par ses coordonnées barycentriques dans le repère des sommets de ce simplexe, si l'on impose que la somme des dites coordonnées est 1. Chaque coordonnée est ≥ 0.*

Démonstration : Voir la proposition-définition **??**.$\square$

On se donne pour la suite un simplexe Δ de $\mathbb{R}^n$ de sommets x_0, x_1, ... , x_n.

Tout point x de Δ est donc repéré par ses coordonées barycentriques $c_0(x)$, ... , $c_n(x)$, avec $\sum_{i=0}^n c_i(x) = 1$, et $\sum_{i=0}^n c_i(x).\overrightarrow{xx_i} = \overrightarrow{0}$.

Définition 243 *Soit $\sigma \in \sigma_{n+1}$ une permutation de $[0,n]$.*
On note Δ_σ l'ensemble des points x de Δ tels que

$$c_{\sigma(0)}(x) \geq c_{\sigma(1)}(x) \geq ... \geq c_{\sigma(n)}(x)$$

Proposition 244 • *Δ est l'union des Δ_σ.*
• *Pour tout $\sigma \in \sigma_{n+1}$, Δ_σ est un simplexe.*
• *Les intérieurs des Δ_σ sont disjoints.*

Démonstration : Le premier • ne mérite pas notre attention.

Pour le second • , c'est plus difficile, et nous allons donc détailler :

Un point x est dans Δ_I avec I la permutation identité, si ses coordonnées c_0, c_1,...,c_n vérifient $c_0 \geq c_1 \geq ... \geq c_n$. En écrivant

$$t_0 = c_0$$

$$t_1 = c_1 - c_0$$

$$t_2 = c_2 - c_1 - c_0$$

$$t_i = c_i - c_{i-1} - c_{i-2} - ... - c_0$$

$$t_n = c_n - c_{n-1} - c_{n-2} - ... - c_0$$

on voit que x est dans Δ_I si et seulement si il est dans l'enveloppe convexe des points de coordonnées barycentriques

$$(1,0,0,0,...,0)$$
$$(1,1,0,0,...,0)$$
$$(1,1,1,0,...,0)$$
$$...$$
$$(1,1,1,1,...,1)$$

Je n'ai pas normalisé pour ne pas alourdir la notation, sinon on obtient

$$(1,0,0,0,...,0)$$
$$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0,...,0)$$
$$(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},0,...,0)$$
$$...$$
$$(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\frac{1}{n},\frac{1}{n},...,\frac{1}{n})$$

Donc il s'agit bien d'un simplexe. Il est non vide car les sommets définis ci-dessus forment bien un repère affine et donc l'intérieur est un voisinage de leur isobarycentre.

Il en va de même pour autre chose que l'identité ; Δ_σ est l'enveloppe convexe de n points comportant respectivement un 1 et seulement des 0 ailleurs, deux 1 et seulement des 0 ailleurs, trois 1 et seulement des 0 ailleurs, et ainsi de suite, chaque fois les 1 étant conservés, et un nouveau 1 étant ajouté.

Le troisième • est démontré dans le lemme qui suit.□

Définition 245 *On appelle* **triangulation d'un simplexe** Δ *un ensemble fini de simplexes* Δ_i *tels que :*
• $\cup_i \Delta_i = \Delta$
• *Si* $i \neq j$, $Int(\Delta_j) \cap Int(\Delta_i) = \emptyset$
• *L'intersection d'une face de* Δ_i *et d'une face de* Δ_j *(pour* $i = j$ *ou* $i \neq j$*) est soit vide soit une face de* Δ_i *et une face de* Δ_j*.*

Lemme 246 *L'ensemble des* Δ_σ *pour* $\sigma \in \sigma_{n+1}$ *est une triangulation de* Δ*.*

<u>Démonstration :</u> • Il est bien clair que la réunion des Δ_σ est bien égale à Δ.

• L'intersection des intérieurs de Δ_σ et Δ_τ avec $(\sigma, \tau) \in \sigma_{n+1}^2$ est incluse dans l'intérieur des intersections, et donc incluse dans un hyperplan ; donc elle est vide.

• Regardons ce qu'est une face de simplexe, par exemple le simplexe Δ_I, avec I la permutation identité.

Il s'agit du barycentre d'un nombre fini de sommets, de la forme

$$(1/p, 1/p, ..., 1/p, 1/p, 0, 0, ..., 0, 0).$$

C'est à dire d'une somme pondérés de

$$(1, 0, 0, ..., 0)$$

$$(\frac{1}{i}, ..., \frac{1}{i}, 0, ..., 0)$$

$$(\frac{1}{i}, ..., \frac{1}{j}, 0, ..., 0)$$

On constate donc qu'une face est entièrement décrite par des équations du type $c_0(x)r_0c_1(x)r_1c_2(x)r_2...r_{n-1}c_n(x)r_n0$, avec r_i opérateur $=$ ou $\geq$.

Une intersection de faces va encore être du même type, car au plus elle va remplacer des $\geq$ par des $=$. D'où le résultat.$\square$

Lemme 247 *Dans la triangulation de Δ en les Δ_σ où σ appartient à σ_{n+1}, les Δ_σ ont un diamètre inférieur à $\frac{n}{n+1}$ fois le diamètre de Δ.*

Démonstration :

• le centre de gravité x (ou isobarycentre) de Δ appartient à tout simplexe Δ_σ (car tous les $c_i(x)$ sont égaux, égaux à $\frac{1}{n+1}$).

• la distance de x à un point de Δ est inférieur ou égale aux distances aux sommets de Δ, donc la distance d'un point de Δ_σ à x est toujours inférieure ou égale à $\frac{n}{n+1}$ fois la longueur de la médiane.

• le diamètre de Δ_σ, qui est la longueur maximal d'un de ses côtés, est donc majoré par la longueur max des côtés sur la face opposée à x, et par la longueur max des arêtes débouchant sur x... Dans tous les cas, cette longueur est majorée par celle d'une médiane de Δ ou d'une face du simplexe (une face de dimension quelconque, éventuellement une arête).$\square$

Lemme 248 *Pour tout ϵ on peut obtenir des triangulations de Δ en simplexes de diamètre inférieurs à ϵ.*

Démonstration :

On va utiliser par récurrence le lemme précédent. Les deux premiers • de la définition d'une triangulation sont faciles à obtenir, le problème est de montrer qu'une partition de chaque élément d'une partition donne encore une partition vérifiant le troisième point, c'est à dire le fait que l'intersection de deux faces de deux éléments distincts de la partition est soit vide soit égale à une face de chacun des deux éléments. Intuitivement, le problème est de voir que les faces se "recollent" bien.

Pour cela il suffit de voir que la triangulation faite selon le lemme précédent induit une triangulation de chacune des faces du dit simplexe - triangulation égale à celle qu'aurait donné le même lemme sur cette face. Cela se voit facilement en voyant qu'une face est une partie du simplexe où l'on annule une des composantes.$\square$

Définition 249 (Numérotation standard d'un simplexe) *Etant donnée une triangulation Δ_i d'un simplexe Δ, on note S l'ensemble des sommets des éléments de cette triangulation. On appelle* **numérotation standard** *d'une triangulation d'un simplexe de sommets $x_0, ..., x_n$ une application f de S dans $\{0, n\}$ telle que $f(x_i) = i$ et si pour tout s dans S $f(s) = i$ pour un certain i tel que x_i est un sommet de la face de Δ de dimension minimale contenant x.*

NB : la caractérisation "pour tout s dans S $f(s) = i$ pour un certain x_i tel que x_i est un sommet de la face de Δ de dimension minimale contenant x" inclue la condition $f(x_i) = i$, car une face peut très bien avoir une dimension 0.

On constate donc que dans une triangulation comme celles que l'on a construites plus haut, l'isobarycentre est autorisé à prendre n'importe quelle valeur puisque la seule face qui le contienne est Δ lui-même.

Proposition 250 *Une numérotation standard f d'une triangulation du simplexe Δ enveloppe convexe de $(x_0, ..., x_n)$ induit une numérotation standard de la triangulation induite sur le simplexe Δ' enveloppe convexe de $(x_0, ..., x_{n-1})$.*

Démonstration :

• Il est clair que tout sommet de la triangulation de Δ' a bien un numéro $< n$.

• Soit x sommet de la triangulation de Δ' appartenant à une face F minimale de Δ.

• F est forcément incluse dans Δ'.

• F est donc la même face que la face minimale de x dans Δ'.

• Donc la numérotation induite est bien standard.$\square$

Lemme 251 (Lemme de Sperner) *Toute triangulation d'un simplexe de dimension n munie d'une numérotation standard possède un élément numéroté $(0, ..., n)$.*

Démonstration :

• Soit Δ notre simplexe, supposé muni d'une numérotation standard f sur une triangulation T de Δ.

• On note $P(U)$ la propriété pour un simplexe U de dimension r d'avoir un sommet numéroté i et un seul pour tout i dans $[1, r]$.

• Soit E l'ensemble des simplexes de T ayant la propriété P.

• Soit F l'ensemble des simplexes de T qui ne sont pas dans E mais dont un numéro et un seul est numéroté i pour tout i dans $[0, n-1]$ (attention ils ne vérifient donc pas la propriété P).

• Soit G l'ensemble des $n-1$-faces de simplexes de T inclus dans Δ' et vérifiant la propriété P (rappelons qu'une face de simplexe est un simplexe).

• Soit H l'ensemble des $n-1$-faces de simplexes de T qui ne sont pas contenues dans Δ' et qui vérifient la propriété P.

• Chaque élément de E contient une et une seule $n-1$-face ayant la propriété P.

• Chaque élément de F contient exactement deux faces ayant la propriété P (facile, il y a exactement deux éléments numérotés pareil, donc on bâtit deux simplexes ayant la numérotation requise).

• Un élément de G est face d'un et d'un seul simplexe (car il est inclus dans Δ').

• Un élément de H est face d'exactement deux simplexes, car il n'est pas inclus dans Δ', et car il n'est pas non plus sur une autre face puisqu'il ne contient pas de sommet numéroté n.

(par simplicité dans la suite et pour alléger les notations je note I le cardinal $|I|$ d'un ensemble I)

• On en déduit $E+2F=G+2.H$ en comptant le nombre de $n-1$-faces ayant la propriété P, avec leurs multiplicités (c'est à dire en comptant deux fois les faces communes à deux simplexes).□

• En comptant modulo 2, on en déduit que E et G on la même parité.

• Il est clair que G est "le" E correspondant à Δ'.

• Par récurrence sur la dimension, on en déduit donc que G a toujours la même parité. Or dans le cas de la dimension 1, on constate facilement que ce nombre est impair ; on a une alternance de 0 et 1, 0 en premier, 1 à la fin, donc on a changé un nombre impair de fois de 0 à 1 ou de 1 à 0.

• On en déduit donc le résultat tant attendu ; E ne peut être nul puisqu'impair...□

Théorème 252 (Théorème de Brouwer) *Soit f une application continue d'un simplexe Δ dans Δ. Alors f admet au moins un point fixe.*

Démonstration : • On suppose que f n'a pas de point fixe.

• Soit Δ_i, pour $i \in [0,n]$, l'ensemble des $x \in \Delta$ tels que $c_i(x) > c_i(f(x))$ (intuitivement f "éloigne" x du sommet i - attention, pas au sens de la distance, mais au sens du poids barycentrique du sommet i ; les points les plus "loin" étant les points de la face opposée, le point le plus proche étant le sommet lui-même).

• $\Delta = \cup_i \Delta_i$. En effet, soit $x \in \Delta$.

- Supposons $c_i(x) \leq c_i(f(x))$ pour tout i.
- $\sum c_i(x) = \sum c_i(f(x)) = 1$
- donc $c_i(x) = c_i(f(x))$ pour tout i
- alors on a f admettant un point fixe en x.
- c'est une contradiction, donc il existe i tel que $c_i(x) > c_i(f(x))$.

• x_i appartient à Δ_i (évident ; f ne peut qu'"éloigner" un point de lui-même, puisque f n'a pas de point fixe)

• x_i n'appartient pas à Δ_j si $j \neq i$ (non moins évident ; x est déjà "loin" autant que possible de x_j, puisqu'il appartient à la face opposée)

• Si x appartient à la face de Δ engendrée par les x_i pour $i \in I$ pour un certain sous-ensemble I de $[0, n]$, alors x n'appartient pas aux Δ_i si $i \notin I$ (toujours évident - si x appartient à la face engendrée par les x_i pour $i \in I$, il appartient à la face opposée à x_j pour tout $j \notin I$, et ne peut donc en être éloigné).

• Soit T une triangulation de Δ, ayant pour ensemble de sommets l'ensemble S. Soit g l'application qui à $s \in S$ associe $g(s)$ avec $s \in \Delta_{g(s)}$; on cherche à montrer qu'il s'agit d'une numérotation standard.

• g est bien définie, puisque l'on a montré que les Δ_i recouvraient Δ.

• le fait que $g(x_i) = i$ a déjà été prouvé ($x_i \in \Delta_i$, $x_i \notin \Delta_j$ quand $j \neq i$).

• soit $s \in S$, et F une face minimale de Δ contenant s. Il faut montrer que $g(s)$ est le numéro d'un sommet de F.

• si $F = \Delta$, le résultat est clair.

• si s appartient à une face stricte de Δ, alors s n'appartient pas aux Δ_j pour j ne désignant pas un numéro de sommet de F (prouvé un peu plus haut) ; donc $g(s)$ est forcément le numéro d'un sommet de F.

• g est donc bien une numérotation.

• On a montré qu'on pouvait construire des triangulations aussi fines que l'on voulait, au sens où chaque simplexe de la triangulation pouvait être imposé de diamètre inférieur à $1/n$. On se donne T_n une telle triangulation, avec g_n la numérotation correspondante, donnée par les questions précédentes.

• D'après le lemme de Sperner, il existe un élément de la triangulation T qui a la propriété P évoquée plus tôt, c'est à dire qu'il comporte un sommet numéroté i pour tout i dans $[0, n]$.

• On peut considérer alors la suite de sommets numérotés 0 dans des simplexes ayant la propriété P de la triangulation T_n.

• Puisque l'on est dans un compact métrique, on peut en extraire une sous-suite convergente, par le théorème de Bolzano-Weierstrass (voir théorème 140). Soit x la limite.

• x est aussi la limite des suites de sommets numérotés i dans des simplexes ayant la propriété P, pour $i \in [1, n]$, car le diamètre des simplexes tend vers 0.

• Par continuité de f, $c_i(f(x)) \geq c_i(x)$ pour tout i.

• Or $\sum_i c_i(x) = \sum_i c_i(f(x)) = 1$, donc $c_i(f(x)) = c_i(x)$ pour tout i.

• On en déduit alors que $x = f(x)$. D'où la contradiction...$\square$

Corollaire 253 (Brouwer) *Toute application continue d'une boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même comporte un point fixe.*

Démonstration :

En fait il suffit de montrer que la boule unité fermée est homéomorphe à un simplexe. Cela est fait dans la proposition 204.□

Corollaire 254 (Champ rentrant dans la sphère) *Soit V un champ de vecteur continu de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Si pour tout x, $\tilde{V}(x) =< V(x), x >$ est négatif strictement [a], alors V s'annule au moins en un point de la boule unité.*

[a] On dit que le champ est rentrant.

Démonstration :

• On note S la sphère unité fermée, et C_r la couronne constituée par la boule unité fermée privée de la boule ouverte de rayon $1 - r$.

• On considère pour tout ϵ l'application f_ϵ de $\overline{B}$ (la boule unité fermée) dans $\mathbb{R}^n$ qui à x associe $x + \epsilon.\overrightarrow{V}(x)$.

• f_ϵ est continu.

• $\tilde{V}$ étant continue sur un compact $\overline{B}$, on peut lui trouver un majorant à $\|V\|$. Notons M ce maximum.

• V étant continue sur un compact S, elle y atteint son maximum, qui est négatif. Notons m ce maximum ; on a $m < 0$.

• En tout point x de S, on peut centrer une boule ouverte de rayon r_x sur laquelle $< x, V(x) >$ est inférieur à $m/2$. La sphère S est recouverte par les boules centrées en x de rayon $r_x/2$; on peut donc extraire de ce recouvrement un recouvrement fini. Les boules de rayon r_x recouvrent elle aussi S, et elles recouvrent aussi une couronne C_r pour un r assez petit.

• Sur C_r, on a donc $< x, V(x) >$ inférieur à $m/2$.

• $\|f_\epsilon(x)\|^2 = \|x\|^2 + \epsilon^2\|V(x)\|^2 + 2\epsilon < V(x), x >$.

• Donc $\|f_\epsilon(x)\|^2 \leq \|x\|^2 + \epsilon^2.M^2 + 2\epsilon < V(x), x >$

• Sur C_r, on a alors $\|f_\epsilon(x)\|^2 \leq \|x\|^2 + \epsilon^2.M^2 + \epsilon.m$

• Pour ϵ suffisamment petit, on a donc $\|f_\epsilon(x)\|^2 < \|x\|^2$

• Pour ϵ suffisamment petit et $\|x\| < 1 - r$ on a aussi $\|f(x)\| \leq 1$ (puisque V est borné).

• On déduit de tout cela que f_ϵ pour ϵ assez petit est une application de la boule unité fermée dans la boule unité fermée. Par le résultat 253, on en déduit donc que f_ϵ admet un point fixe, et que donc $\tilde{V}$ s'annule quelque part.□

Bibliographie

[1] P. Barbe, M. Ledoux, *Probabilité*, Belin, 1998.

[2] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, 1983.

[3] H. Cartan, *Calcul différentiel*, FLEMMARD.

[4] A. Chambert-Loir, S. Fermigier, V. Maillot, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 1*, Masson, 1997.

[5] A. Chambert-Loir, S. Fermigier, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 2*, Masson, 1995.

[6] A. Chambert-Loir, S. Fermigier, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 3*, Masson, 1996.

[7] P.G. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Dunod, 1998.

[8] F. Combes *Algèbre et géométrie*, Bréal, 1998. <

[9] J.-P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, Presses Universitaires de Grenoble, 1996.

[10] W. Giorgi, *Thèmes mathématiques pour l'agrégation*, Masson, 1998.

[11] A. Gramain, *Intégration*, Hermann 1988, Paris.

[12] J.-L. Krivine, *Introduction to axiomatic set theory*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland.

[13] S. Lang, *Real analysis*, Addison-Wesley Publishing company, 1969.

[14] D. Perrin, *Cours d'algèbre*, Ellipses 1996.

[15] A. Pommellet, *Cours d'analyse*, Ellipses 1994.

[16] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Masson 1992.

[17] R. Smullyan, *Théorie de la récursion pour la métamathématique*, FLEMMARD.

[18] Y.G. Sinai *Probability theory - An introduction course*, Springer Textbook, 1992.

[19] P. Tauvel, *Mathématiques générales pour l'agrégation*, Masson, 1997.

[20] J. Vauthier, J.J. Prat, *Cours d'analyse mathématiques de l'intégration*, Masson, 1994.

[21] D. WILLIAMS, *Probability with martingales*, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1991.

[22] C. ZUILY, H. QUEFFÉLEC, *Eléments d'analyse pour l'intégration*, MASSON, 1995.